CADANGAN ZILLMER DENGAN DISTRIBUSI PARETO DAN TINGKAT BUNGA COX-INGERSOLL-ROSS

Hasriati[1)]
Ihda Hasbiyati[2)]
Audia Kirana[3)]
Agung Prabowo[4*)]

[1,2,3)] Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Riau
[4)] Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Jendral Soedirman
E-mail: agung.prabowo@unsoed.ac.id

ABSTRACT

This article discusses Zillmer's reserves for endowment life insurance. Zillmer reserves are a type of modification of premium reserves which are calculated using prospective reserves and the Zillmer rate. In Zillmer reserves, loading which is the difference between gross premium and net premium in the first policy year is greater than standard loading, so the purpose of this research is to find a way to make the loading smaller. To achieve this goal, this article uses the Pareto distribution and the Cox-Ingersoll-Ross (CIR) interest rate model. Based on the illustration, even though in the first policy year there was still a negative loading, however, Zillmer's reserves have been increasing from time to time since the second policy year.

Keywords: dwiguna life insurance, zillmer reserves, pareto distribution, cox-ingersoll-ross *interest rate.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas tentang cadangan Zillmer pada asuransi jiwa dwiguna. Cadangan Zillmer merupakan salah satu jenis modifikasi cadangan premi yang perhitungannya menggunakan cadangan prospektif dan tingkat Zillmer. Pada cadangan Zillmer, *loading* yang merupakan selisih dari premi kotor dan premi bersih pada tahun polis pertama nilainya lebih besar dibanding dengan *standard loading*, sehingga tujuan penelitian ini adalah menemukan cara agar *loading* tersebut menjadi lebih kecil. Untuk mencapai tujuan tersebut, dalam artikel ini digunakan distribusi Pareto dan model tingkat bunga Cox-Ingersoll-Ross (CIR). Berdasarkan ilustrasi yang dilakukan, meksipun pada tahun polis pertama masih diperoleh *loading* yang bernilai negatif namun besar cadangan Zillmer bergerak semakin meningkat dari waktu ke waktu sejak tahun polis kedua.

Kata Kunci: asuransi jiwa dwiguna, cadangan zillmer, distribusi pareto, tingkat bunga cox-ingersoll-ross.

Pada asuransi jiwa dwiguna masa pertanggungan berlangsung sampai dengan masa berakhirnya polis asuransi. Uang pertanggungan diberikan kepada peserta jika selama masa pertanggungan tersebut peserta meninggal dunia maupun masih bertahan hidup (Rotar, 2015); (Olivieri & Pitacco, 2015). Pada perusahaan asuransi, saat seseorang menjadi peserta asuransi maka terdapat kewajiban membayarkan premi kepada perusahaan asuransi. Dari pembayaran premi akan diperoleh sejumlah pendapatan yang dihasilkan dari bunga selama jangka waktu pembayaran premi. Pendapatan dari premi tersebut nantinya akan digunakan untuk membayarkan sejumlah keperluan dari perusahaan asuransi, seperti pembayaran klaim. Pendapatan atas premi beserta bunganya dihimpun sebagai cadangan (*reserve*).

Cadangan adalah besar dana yang dimiliki perusahaan asuransi selama jangka waktu pertanggungan para pemegang polisnya. Cadangan yang dimiliki perusahaan akan digunakan untuk pembayaran uang pertanggungan kepada para peserta asuransi. Dalam perhitungan besar cadangan diperlukan informasi tentang besar premi yang diprediksikan akan diterima dan anuitas hidup. Sedangkan perhitungan besar premi dan anuitas hidup dipengaruhi oleh peluang hidup dan peluang meninggal dari peserta asuransi.

Berdasarkan waktu yang menjadi dasar perhitungannya, cadangan premi dibagi menjadi dua yaitu cadangan retrospektif dan cadangan prospektif. Cadangan premi yang dihitung berdasarkan waktu yang telah lalu dinamakan cadangan retrospektif (Olivieri & Pitacco, 2015); (Kamil *et al.*, 2021). Sedangkan cadangan prospektif adalah cadangan premi yang dihitung berdasarkan waktu yang akan datang (Olivieri & Pitacco, 2015); (Kamil *et al.*, 2021). Pada cadangan prospektif, perhitungan cadangan berdasarkan nilai sekarang dari semua pengeluaran di waktu yang akan datang dikurangi dengan nilai sekarang dari total pendapatan di waktu yang akan datang untuk tiap pemegang polis.

Pada awal tahun polis dibutuhkan biaya-biaya untuk membayar berbagai macam keperluan, misalnya biaya provisi yang dibayarkan sebagai imbalan kepada para petugas pengumpul premi. Biaya awal tahun polis ini biasanya sangat besar. Oleh karena itu diperlukan suatu cara agar perusahaan asuransi tidak mengalami kerugian di awal-awal waktu berdirinya. Hal ini menjadi permasalahan yang diangkat pada penelitian ini, yaitu bagaimana cara yang dapat dilakukan agar cadangan premi tidak bernilai negatif pada tahun polis pertama, atau seandainya masih bernilai negatif maka angkanya tidak terlalu besar. Cadangan premi negatif akan memberikan peluang yang lebih besar pada kebangkrutan perusahaan asuransi.

Untuk membangun cadangan, maka sebagian dari premi harus dialokasikan menjadi cadangan premi yang dasar perhitungannya adalah premi netto dan dilakukan dengan metode cadangan prospektif atau retrospektif (Oktavian *et al.*, 2014). Untuk menghindari kerugian di tahun-tahun awal operasional perusahaan, maka pengelolaan cadangan perlu mempertimbangkan penyertaan biaya operasional perusahaan. Salah satu cara yang dapat dilakukan untuk menangani masalah tersebut adalah dengan melakukan pengumpulan dana dalam bentuk cadangan premi yang dimodifikasi menjadi cadangan premi Zillmer. Penelitian-penelitian terkait pembentukan cadangan dan cadangan Zillmer telah dilakukan oleh banyak peneliti. Berikut ini beberapa penelitian terkait pembentukan cadangan Zillmer yang dihitung atas dasar premi bruto sebagai modifikasi dari cadangan yang dihitung atas dasar premi netto. Penelitian-penelitian tersebut dikutip dari (Kamil *et al.*, 2021); (Dewi *et al.*, 2013); (Oktavian *et al.*, 2014); (Utami *et al.*, 2015); (Iriana *et al.*, 2020), dan (Hasriati *et al.*, 2020).

Pada (Kamil *et al.*, 2021), dijelaskan dalam penelitiannya sampai pada kesimpulan bahwa metode Zillmer dapat digunakan untuk membangun cadangan premi perusahaan asuransi jiwa sebagai upaya untuk mengatasi kerugian pendapatan pada tahun-tahun awal perusahaan berdiri, atau untuk perusahaan yang sudah cukup lama beroperasi namun pendapatan preminya relatif masih kecil.

Pada penelitian (Dewi *et al.*, 2013), telah menggunakan metode Zillmer untuk perhitungan cadangan prospektif pada asuransi jiwa dengan dasar perhitungan adalah premi kotor karena telah menambahkan biaya operasional perusahaan dalam perhitungan cadangannya. Dalam penelitiannya tersebut, dilakukan perhitungan dengan suku bunga yang berbeda dan disimpulkan bahwa nilai premi tahunan akan semakin besar jika suku bunganya diperkecil. Penggunaan tabel mortalitas yang berbeda juga memberikan hasil yang berbeda. Nilai premi tahunan yang dihitung dengan Tabel

Mortalitas CSO 1958 memberikan hasil premi tahunan yang lebih besar dibanding Tabel Mortalitas Indonesia (TMI) 1999.

Penelitian (Oktavian *et al.*, 2014) menggunakan tiga metode yaitu metode Zillmer, *full preliminary term*, dan *premium sufficiency*. Hasil penelitian menunjukkan bahwa besar cadangan pada akhir masa pertanggungan yang dihitung dengan ketiga metode tersebut adalah sama, tetapi terdapat perbedaan signifikan pada awal masa pertanggungan. Pada penelitian (Utami *et al.*, 2015) menggunakan asumsi Balducci pada perhitungan cadangan Zillmer untuk asuransi jiwa dwiguna gabungan dengan status *joint life*. Penggunaan asumsi Balducci memberikan nilai cadangan Zillmer yang lebih tinggi dibandingkan jika dihitung tanpa asumsi. Penelitian (Iriana *et al.*, 2020) menghitung cadangan Zilmer pada asuransi jiwa seumur hidup dengan menggunakan Tabel Mortalitas Indonesia 1999 dan 2011 dan perbedaan jenis kelamin. Simulasi dilakukan pada nasabah berusia 25-35 tahun. Hasil penelitian menunjukkan bahwa cadangan Zillmer lebih besar jika dihitung dengan TMI 1999 dibandingkan dengan TMI 2011. Jika ditinjau dari jenis kelamin, cadangan Zillmer untuk nasabah laki-laki lebih besar dibanding nasabah perempuan. Pada (Hasriati *et al.*, 2020) dibahas penentuan cadangan prospektif pada asuransi jiwa dwiguna. Sedangkan, pada (Hasriati & Nababan, 2019) dimodelkan cadangan premi prospektif pada asuransi jiwa dwiguna untuk peserta yang berumur x tahun dengan t adalah waktu perhitungan cadangan, m adalah masa pembayaran premi, dan n adalah jangka waktu pertanggungan.

Asumsi lain yang dapat digunakan pada perhitungan cadangan Zillmer adalah asumsi Makeham. Perhitungan faktor diskonto dilakukan dengan model tingkat bunga Rendleman-Bartter untuk jenis asuransi jiwa berjangka. Berdasarkan telaah terhadap pustaka-pustaka terdahulu, perhitungan cadangan Zillmer dilakukan dengan menimbang (1) jenis distribusi, asumsi atau tabel mortalitas yang digunakan, (2) model tingkat bunga yang digunakan, dan (3) jenis asuransi jiwa.

Berdasarkan latar belakang yang telah dibangun dan rujukan-rujukan yang dikutip, maka tujuan penelitian ini adalah menentukan cara agar cadangan premi pada tahun polis pertama tidak bernilai negatif. Salah satu cara yang dapat membantu dan digunakan sebagai penyelesaian dalam penelitian ini adalah penggunaan cadangan Zillmer dengan ketahanan hidup mengikuti distribusi Pareto dan tingkat bunga menggunakan model tingkat bunga CIR. Sedangkan manfaat dari penelitian ini adalah memberikan solusi untuk perusahaan asuransi dalam mengelola premi sehingga cadangan premi pada tahun polis pertama tidak menjadi masalah untuk operasional perusahaan di waktu-waktu ke depannya. Pada penyelesaiannya akan digunakan distribusi Pareto, model tingkat bunga Cox-Ingersoll-Ross (CIR) dan diaplikasikan pada asuransi jiwa dwiguna.

METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode kualitatif yang dilakukan dengan studi literatur dan jurnal-jurnal yang relevan. Penelitian ini tidak menyertakan data sehingga tidak ada studi kasus yang dibahas. Namun, pada penelitian ini diberikan satu buah contoh sebagai ilustrasi dari penggunaan distribusi Pareto dan tingkat bunga CIR pada perhitungan besar cadangan Zillmer.

Pada bagian metode dijelaskan mengenai teori-teori statistika dan aktuaria yang digunakan untuk menganalisis permasalahan yang dibahas. Teori-teori tersebut mencakup fungsi survival, peluang hidup, peluang meninggal, dan distribusi Pareto.

Fungsi Survival, Peluang Meninggal dan Peluang Hidup

Berikut ini diberikan definisi variabel random yang akan digunakan untuk membangun fungsi survival dan menentukan besarnya peluang meninggal dan peluang hidup.

Definisi 1 (Bijma *et al.*, 2017), (Gupta & Kapoor, 2020)

Variabel random X dikatakan variabel random kontinu jika terdapat fungsi $f(x)$ sehingga fungsi distribusi kumulatifnya dinyatakan sebagai

$$F(x) = \Pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du.$$

Fungsi survival dinotasikan dengan $S(x)$, dinyatakan sebagai

$$S(x) = \Pr(X > x).$$

Hubungan antara fungsi survival $S(x)$ dengan fungsi distribusi kumulatif $F(x)$adalah

$$S(x) = \Pr(X > x) = 1 - \Pr(X \leq x),$$

$$S(x) = 1 - F(x). \tag{1}$$

Dalam bidang ilmu aktuaria, fungsi survival $S(x)$ menyatakan peluang seseorang akan tetap hidup setelah mencapai usia x tahun, dengan X merupakan suatu variabel random kontinu yang menyatakan waktu bertahan hidup setiap individu. Fungsi survival dari peserta asuransi jiwa bergantung kepada sisa usia yang masih akan dijalani oleh setiap individu peserta sehingga funsgi survival berkaitan dengan waktu.

Misalkan $T(x)$ adalah variabel random kontinu yang menyatakan sisa waktu hidup yang masih akan dijalani oleh seseorang yang berusia x dan t menyatakan jangka waktu, maka fungsi distribusi untuk variabel random $T(x)$ dinyatakan sebagai

$$F_{T(x)}(t) = \Pr[T(x) \leq t] \;, \qquad t \geq 0$$

Dalam hal ini fungsi $F_{T(x)}(t)$ menyatakan peluang seseorang yang berusia x tahun akan meninggal dalam jangka waktu t tahun kemudian, dan selanjutnya $F_{T(x)}(t)$ dinotasikan dengan ${}_tq_x$ (Dickson *et al.*, 2020); (Tsao, 2019). Berdasarkan persamaan (1), maka fungsi survival juga dapat dinyatakan sebagai

$$S_{T(x)}(t) = 1 - F_{T(x)}(t),$$

$$S_{T(x)}(t) = 1 - {}_tq_x.$$

Hubungan antara peluang hidup (${}_tp_x$) dengan peluang meninggal (${}_tq_x$) untuk seorang peserta asuransi yang saat ini berusia x tahun dan akan dapat bertahan hidup hingga t tahun kemudian dinyatakan sebagai

$${}_tp_x = 1 - {}_tq_x.$$

Penentuan besar premi tunggal selain menggunakan faktor diskon, juga dengan peluang meninggal tertunda. Misalkan peserta asuransi yang berusia x tahun akan bertahan hidup hingga t tahun dan akan meninggal pada u tahun berikutnya, artinya x meninggal diantara usia $(x+t)$ dan $(x+t+u)$ tahun. Peluang meninggal tertunda dinyatakan sebagai berikut:

$${}_{t|u}q_x = \Pr\,[t < T(X) \leq t+u]$$

$${}_{t|u}q_x = {}_tp_x - {}_{t+u}p_x$$

Jika $u = 1$, maka individu yang berumur x tahun dan akan bertahan hidup hingga t tahun kemudian serta akan meninggal hingga 1 tahun berikutnya adalah

$${}_{t|1}q_x = {}_tp_x - {}_{t+1}p_x \,.$$

Distribusi Pareto pada Peluang Hidup

Menurut (Dalpatadu & Singh, 2015); (Warsono *et al.*, 2019) dan (Sharpe & Juárez, 2021), misalkan x merupakan variabel random dari distribusi Pareto dengan parameter θ dan p, maka fungsi kepadatan peluang dari distribusi Pareto adalah

$$f(x,\theta,p) = \frac{\theta p^{\theta}}{x^{\theta+1}}, \quad x > p, \quad \theta > 0, \quad p > 0,$$

dengan parameter θ merupakan parameter bentuk dan p adalah parameter skala.

Berdasarkan fungsi distribusi kumulatif $F\ (x)$ dari ditribusi Pareto yaitu

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_p^x f(t)dt \\ &= \int_p^x \frac{\theta p^{\theta}}{t^{\theta+1}} dt \\ &= \theta p^{\theta} \int_p^x t^{-(\theta+1)} dt \\ &= \theta p^{\theta} \left[-\frac{1}{\theta} t^{-\theta}\right]_p^x \\ &= \theta p^{\theta} \left[\left(-\frac{1}{\theta} x^{-\theta}\right) - \left(-\frac{1}{\theta} p^{-\theta}\right)\right] \\ &= 1 - \left(\frac{p}{x}\right)^{\theta} \end{aligned} \tag{2}$$

Berdasarkan persamaan (2) diperoleh fungsi distribusi kumulatif $F(x\ +\ t)$ sebagai berikut:

$$F(x+t) = 1 - \left(\frac{p}{x+t}\right)^{\theta} \tag{3}$$

Berdasarkan (1) dan (3), fungsi survival dari distribusi Pareto yaitu

$$S(x) = \left(\frac{p}{x}\right)^{\theta}$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} F_{T(x)}(t) &= \frac{F(x+t) - F(x)}{S(x)} \\ &= \frac{\left[1 - \left(\frac{p}{x+t}\right)^{\theta}\right] - \left[1 - \left(\frac{p}{x}\right)^{\theta}\right]}{\left[\left(\frac{p}{x}\right)^{\theta}\right]} \\ &= \frac{-\left(\frac{p}{x+t}\right)^{\theta} + \left(\frac{p}{x}\right)^{\theta}}{\left(\frac{p}{x}\right)^{\theta}} \\ &= 1 - \left(\frac{x}{x+t}\right)^{\theta} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh,

$${}_tq_x = 1 - \left(\frac{x}{x+t}\right)^{\theta}$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

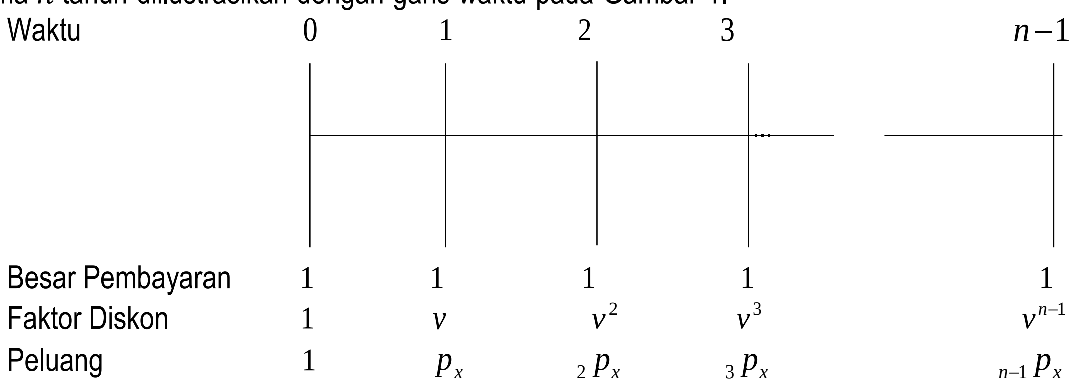
Pada bagian Hasil dan Pembahasan diulas mengenai anuitas hidup, premi asuransi jiwa dwiguna, cadangan prospektif, dan cadangan Zillmer. Semua pembahasan tersebut dilakukan dengan menggunakan distribusi Pareto dan model tingkat bunga Cox-Ingersoll-Ross (CIR). Pada bagian akhir diberikan satu contoh perhitungan cadangan Zillmer disertai ilustrasi grafisnya.

Pada penelitian ini digunakan cadangan Zillmer yang merupakan modifikasi dari cadangan premi prospektif dengan perhitungan menggunakan tingkat Zillmer sebesar α (Olivieri & Pitacco, 2015), (Kamil *et al.*, 2021). Selanjutnya, penentuan cadangan Zillmer mensyaratkan digunakannya suatu distribusi tertentu pada perhitungan premi tunggal dan nilai tunai anuitas, dan dalam penelitian ini digunakan distribusi Pareto (Dalpatadu & Singh, 2015), (Warsono *et al.*, 2019), (Sharpe & Juárez, 2021).

Perhitungan cadangan premi juga melibatkan tingkat bunga, dan pada perhitungan cadangan premi untuk jangka waktu yang panjang perlu diperhatikan pola fluktuasi pergerakan tingkat bunga yang memiliki kecenderungan untuk kembali menuju tingkat bunga rata-rata. Oleh karena itu, penelitian ini menggunakan model tingkat bunga CIR yang memenuhi kecenderungan tersebut. Menurut (Chan & Tse, 2022), faktor diskon pada model tingkat bunga CIR dipengaruhi rata-rata dan variansi tingkat bunga CIR. Dengan kecenderungan rata-rata tingkat bunga yang kembali bergerak menuju rata-rata dalam jangka panjang, maka faktor diskonto yang dihitung dengan model tingkat bunga CIR diharapkan akan menghasilkan peningkatan besar cadangan Zillmer yang semakin meningkat.

Anuitas Hidup Awal Berjangka dengan Distribusi Pareto dan Tingkat Bunga CIR

Pada anuitas hidup awal, menurut (Chan & Tse, 2022) dan (Sidarto *et al.*, 2019), pembayaran mulai dilakukan mulai awal tahun periode hingga tahun ke $(n-1)$ dan akan berhenti bila peserta asuransi meninggal dunia sebelum mencapai periode ke $(n-1)$. Menurut (Dickson *et al.*, 2020), nilai tunai anuitas hidup awal berjangka untuk peserta berusia x tahun dengan jangka waktu pertanggungan selama n tahun diilustrasikan dengan garis waktu pada Gambar 1.



Gambar 1. Garis Waktu Nilai Tunai Anuitas Hidup Awal Berjangka
Sumber: (Chan & Tse, 2022)

Dari ilustrasi pada Gambar 1 diketahui bahwa nilai tunai anuitas hidup awal berjangka dari peserta berumur x tahun dengan masa pertanggungan n tahun dapat dinyatakan dengan

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + vp_x + v^2\ {}_2p_x + v^3\ {}_3p_x + \cdots + v^{n-1}\ {}_{n-1}p_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \ {}_t p_x$$

Model CIR ditemukan pada tahun 1985 oleh tiga orang yaitu Jhon C. Cox, Jonathan E. Ingersoll Jr. dan Stephen A. Ross. Model CIR bersifat *mean reversion*, artinya tingkat bunga dari model tingkat bunga CIR memiliki kecenderungan untuk kembali menuju rata-rata jangka panjang (Chan & Tse, 2022).

Definisi 2:
Bentuk model tingkat bunga CIR dinyatakan dengan (Chan & Tse, 2022) :

$$dr_s = \beta(\alpha - r_s)ds + \theta\sqrt{r_s}dW_s$$

Model tingkat bunga CIR dipengaruhi oleh rata-rata dari tingkat bunganya. Berdasarkan sifat ekspektasi dari proses Wiener diperoleh:

$$E(r_s) = e^{-\beta s}\, r_0 + \alpha\left(1 - e^{-\beta s}\right) \tag{4}$$

Definisi 3:
Besar faktor diskon untuk t tahun yang akan datang yaitu v^t menggunakan tingkat bunga r_s dinyatakan dengan (Rotar, 2015); (Olivieri & Pitacco, 2015).

$$v^t = \prod_{s=1}^{t} \frac{1}{1 + E(r_s)}$$

Dengan menggunakan tingkat bunga CIR dengan nilai ekspektasinya diberikan pada (4), diperoleh

$$v^t = \prod_{s=1}^{t} \frac{1}{1 + e^{-\beta s} r_0 + \alpha(1 - e^{-\beta s})}$$

Dengan menggunakan Ddstribusi Pareto dan tingkat bunga CIR diperoleh besar anuitas:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} \left(\prod_{s=1}^{t} \frac{1}{1+e^{-\beta s} r_0 + \alpha\left(1 - e^{-\beta s}\right)}\right)\left(\frac{x}{x+t}\right)^{\theta} \tag{5}$$

Selanjutnya, diperoleh nilai anuitas hidup awal berjangka untuk usia x tahun dengan masa pertanggungan m tahun untuk $m < n$ dengan menggunakan distribusi Pareto dan tingkat bunga CIR yaitu

$$\ddot{a}_{x:\overline{m|}} = \sum_{t=0}^{m-1} \left(\prod_{s=1}^{t} \frac{1}{1+e^{-\beta s} r_0 + \alpha\left(1 - e^{-\beta s}\right)}\right)\left(\frac{x}{x+t}\right)^{\theta} \tag{6}$$

Nilai anuitas hidup awal berjangka untuk usia $(x + t)$ tahun dengan masa pertanggungan $(m - t)$ tahun dikonstruksi menurut (6), yaitu

$$\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}} = \sum_{k=0}^{m-t-1} \left(\prod_{s=1}^{k} \frac{1}{1+e^{-\beta s} r_0 + \alpha\left(1 - e^{-\beta s}\right)}\right)\left(\frac{x}{x+t+k}\right)^{\theta} \tag{7}$$

Berdasarkan Gambar 1 dengan jangka waktu pertanggungan h tahun dengan $h < m < n$ dan merujuk pada (6) diperoleh nilai anuitas hidup awal

$$\ddot{a}_{x:\overline{h|}} = \sum_{t=0}^{h-1} \left(\prod_{s=1}^{t} \frac{1}{1+e^{-\beta s} r_0 + \alpha\left(1 - e^{-\beta s}\right)}\right)\left(\frac{x}{x+t}\right)^{\theta} \tag{8}$$

Untuk peserta asuransi yang berumur $(x + t)$ tahun dengan jangka waktu pertanggungan $(h + t)$ tahun dibangun dengan mengacu pada (8) dan diperoleh hasil

$$\ddot{a}_{x+t:\overline{h-t|}} = \sum_{k=0}^{h-t-1}\left(\prod_{s=1}^{k}\frac{1}{1+e^{-\beta s}r_0+\alpha(1-e^{-\beta s})}\right)\left(\frac{x}{x+t+k}\right)^{\theta} \tag{9}$$

Premi Asuransi Jiwa Dwiguna dengan Distribusi Pareto dan Tingkat Bunga CIR

Asuransi jiwa berjangka adalah suatu asuransi dimana uang pertanggungan akan diterima jika tertanggung meninggal dunia saat masa kontrak berlangsung. Premi tunggal asuransi jiwa berjangka untuk status perorangan dengan kontrak polis selama n tahun dan uang pertanggungan senilai R satuan pembayaran yang dibayarkan di akhir tahun polis dinyatakan sebagai berikut:

$$(RA)^{1}_{x:\overline{n|}} = R\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\,{}_{t|}q_x$$

Premi tunggal asuransi jiwa berjangka dengan kontrak polis selama n tahun dan uang pertanggungan senilai R satuan pembayaran menggunakan distribusi Pareto dan tingkat bunga CIR yaitu

$$(RA)^{1}_{x:\overline{n|}} = R\sum_{t=0}^{n-1}\left(\prod_{s=1}^{t+1}\frac{1}{1+e^{-\beta s}r_0+\alpha(1-e^{-\beta s})}\right)\left(\left(\frac{x}{x+t}\right)^{\theta}-\left(\frac{x}{x+t+1}\right)^{\theta}\right) \tag{10}$$

Pada penelitian (Olivieri & Pitacco, 2015); (Kamil *et al.*, 2021) dinyatakan bahwa asuransi jiwa dwiguna murni merupakan kebalikan dari asuransi jiwa berjangka. Pada asuransi jiwa dwiguna murni jika pemegang polis tetap hidup sejak saat kontrak asuransi dimulai sampai dengan jangka waktu tertentu, maka pemegang polis akan menerima sejumlah uang pertanggungan. Premi tunggal asuransi jiwa dwiguna murni untuk peserta berusia x tahun dengan jangka waktu pertanggungan n tahun dan uang pertanggungan senilai R satuan pembayaran dinyatakan dengan

$$(RA)_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = R\left(v^{n}\,{}_{n}p_x\right) \tag{11}$$

Besar premi tunggal untuk asuransi jiwa dwiguna murni yang dihitung dengan distribusi Pareto dan model tingkat bunga CIR adalah

$$(RA)_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = R\left(\prod_{s=1}^{n}\frac{1}{1+e^{-\beta s}r_0+\alpha(1-e^{-\beta s})}\right)\left(\frac{x}{x+n}\right)^{\theta} \tag{12}$$

Penelitian (Dickson *et al.*, 2020) menjelaskan premi tunggal asuransi jiwa dwiguna dari peserta berusia x tahun dengan masa pertanggungan selama n tahun senilai 1 dinotasikan dengan $A_{x:\overline{n|}}$ dan dinyatakan dengan

$$A_{x:\overline{n|}} = A^{1}_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}},$$

Sehingga diperoleh premi tunggal asuransi jiwa dwiguna dengan menggunakan model tingkat bunga CIR dari peserta berumur x dan dengan masa pertanggungan selama n tahun senilai R yaitu

$$(RA)_{x:\overline{n|}} = R\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\,{}_{t|}q_x + R\left(v^{n}\,{}_{n}p_x\right)$$

$$(RA)_{x:\overline{n|}} = R\sum_{t=0}^{n-1}\left(\prod_{s=1}^{t+1}\frac{1}{1+e^{-\beta s}r_0+\alpha(1-e^{-\beta s})}\right)\left(\left(\frac{x}{x+t}\right)^{\theta}-\left(\frac{x}{x+t+1}\right)^{\theta}\right) + R\left(\prod_{s=1}^{n}\frac{1}{1+e^{-\beta s}r_0+\alpha(1-e^{-\beta s})}\right)\left(\left(\frac{x}{x+n}\right)^{\theta}\right) \tag{13}$$

Sedangkan premi tunggal asuransi jiwa dwiguna untuk peserta berusia $(x+t)$ tahun dan masa pertanggungan selama $(n-t)$ tahun adalah sebagai berikut:

$$(RA)_{x+t:\overline{n-t|}} = R\sum_{k=0}^{n-t-1}\left(\prod_{s=1}^{k+1}\frac{1}{1+e^{-\beta s}r_0+\alpha\left(1-e^{-\beta s}\right)}\right)\left(\left(\frac{x+t}{x+t+k}\right)^{\theta}-\left(\frac{x+t}{x+t+1+k}\right)^{\theta}\right)+ R\left(\prod_{s=1}^{n-t}\frac{1}{1+e^{-\beta s}r_0+\alpha\left(1-e^{-\beta s}\right)}\right)\left(\frac{l_{x+t+n-t}}{l_x+t}\right). \quad (14)$$

Misalkan $(RA)_{x:\overline{n|}}$ menyatakan premi tunggal asuransi jiwa dwiguna dan $(R\ddot{a})_{x:\overline{n|}}$ menyatakan anuitas hidup awal berjangka masing-masing senilai R, maka besar premi tahunan pada asuransi jiwa dwiguna untuk peserta berusia x tahun dan mengikuti asuransi selama n tahun yang dinotasikan dengan $(RP)_{x:\overline{n|}}$ dan dapat dinyatakan dengan

$$(RP)_{x:\overline{n|}} = \frac{(RA)_{x:\overline{n|}}}{(R\ddot{a})_{x:\overline{n|}}}. \quad (15)$$

Dengan mensubsitasikan persamaan (13) dan persamaan (4) ke persamaan (15) diperoleh premi tahunan asuransi jiwa dwiguna dengan menggunakan tingkat bunga CIR yaitu

$$(RP)_{x:\overline{n|}} = \frac{R\sum_{t=0}^{n-1}\left(\prod_{s=1}^{t+1}\frac{1}{1+e^{-\beta s}r_0+\alpha(1-e^{-\beta s})}\right)\left(\left(\frac{x}{x+t}\right)^{\theta}-\left(\frac{x}{x+t+1}\right)^{\theta}\right)}{\sum_{t=0}^{n-1}\left(\prod_{s=1}^{t}\frac{1}{1+e^{-\beta s}r_0+\alpha(1-e^{-\beta s})}\right)\left(\frac{x}{x+t}\right)^{\theta}} + \frac{R\left(\prod_{s=1}^{n}\frac{1}{1+e^{-\beta s}r_0+\alpha\left(1-e^{-\beta s}\right)}\right)\left(\frac{x}{x+n}\right)^{\theta}}{\sum_{t=0}^{n-1}\left(\prod_{s=1}^{t}\frac{1}{1+e^{-\beta s}r_0+\alpha\left(1-e^{-\beta s}\right)}\right)\left(\frac{x}{x+t}\right)^{\theta}}. \quad (16)$$

Berdasarkan persamaan (15) diperoleh premi tahunan untuk peserta berusia x tahun yang mengikuti asuransi selama n tahun dan masa pembayaran selama m tahun

$${}_{m}(RP)_{x:\overline{n|}} = \frac{R\sum_{t=0}^{n-1}\left(\prod_{s=1}^{t+1}\frac{1}{1+e^{-\beta s}r_0+\alpha(1-e^{-\beta s})}\right)\left(\left(\frac{x}{x+t}\right)^{\theta}-\left(\frac{x}{x+t+1}\right)^{\theta}\right)}{\sum_{t=0}^{m-1}\left(\prod_{s=1}^{t}\frac{1}{1+e^{-\beta s}r_0+\alpha(1-e^{-\beta s})}\right)\left(\frac{x}{x+t}\right)^{\theta}} + \frac{R\left(\prod_{s=1}^{n}\frac{1}{1+e^{-\beta s}r_0+\alpha\left(1-e^{-\beta s}\right)}\right)\left(\frac{x}{x+n}\right)^{\theta}}{\sum_{t=0}^{m-1}\left(\prod_{s=1}^{t}\frac{1}{1+e^{-\beta s}r_0+\alpha\left(1-e^{-\beta s}\right)}\right)\left(\frac{x}{x+t}\right)^{\theta}}. \quad (17)$$

Cadangan Prospektif dengan Distribusi Pareto dan Tingkat Bunga CIR

Cadangan premi prospektif pada asuransi jiwa dwiguna untuk seseorang yang berusia x tahun dengan uang pertanggungan senilai 1 dibayarkan pada akhir tahun polis adalah

$${}_{t}^{m}V_{x:\overline{n|}} = \begin{cases} A_{x+t:\overline{n-t|}} + {}_{m}P_{x:\overline{n|}}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}}, & t < m < n \\ A_{x+t:\overline{n-t|}} & , m \le t < n \end{cases}, \quad (18)$$

dengan $t < m < n$

t : waktu perhitungan cadangan

m : masa pembayaran premi

n : jangka waktu pertanggungan

Dengan mensubstitusikan persamaan (14) dan persamaan (17) ke persamaan (18) diperoleh cadangan prospektif asuransi jiwa dwiguna untuk jangka waktu $t < m < n$ yaitu

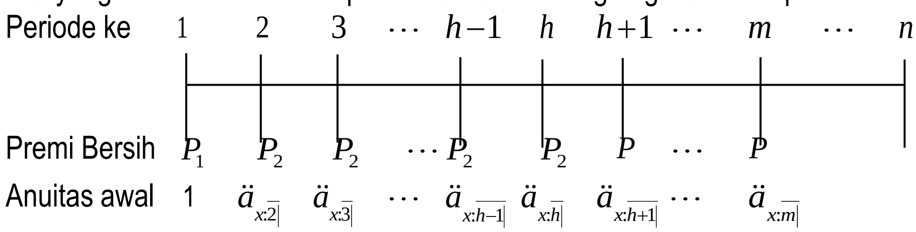
$${}_{t}^{m}(RV)_{x:\overline{n|}} = \left(R\sum_{k=0}^{n-t-1}\left(\prod_{s=1}^{k+1}\frac{1}{1+e^{-\beta s}r_0+\alpha\left(1-e^{-\beta s}\right)}\right)\left(\left(\frac{x+t}{x+t+k}\right)^{\theta}-\left(\frac{x+t}{x+t+1+k}\right)^{\theta}\right)\right.$$

$$+ R\left(\prod_{s=1}^{n-t}\frac{1}{1+e^{-\beta s}r_0+\alpha\left(1-e^{-\beta s}\right)}\right)\left(\frac{x+t}{x+t+(n-t)}\right)^{\theta}\Bigg)$$
$$+\left(\frac{R\sum_{t=0}^{n-1}\left(\prod_{s=1}^{t+1}\frac{1}{1+e^{-\beta s}r_0+\alpha\left(1-e^{-\beta s}\right)}\right)\left(\left(\frac{x}{x+t}\right)^{\theta}-\left(\frac{x}{x+t+1}\right)^{\theta}\right)}{\sum_{t=0}^{m-1}\left(\prod_{s=1}^{t}\frac{1}{1+e^{-\beta s}r_0+\alpha\left(1-e^{-\beta s}\right)}\right)\left(\frac{x}{x+t}\right)^{\theta}}\right.$$
$$\left.+\frac{R\left(\prod_{s=1}^{n}\frac{1}{1+e^{-\beta s}r_0+\alpha\left(1-e^{-\beta s}\right)}\right)\left(\frac{x}{x+n}\right)^{\theta}}{\sum_{t=0}^{m-1}\left(\prod_{s=1}^{t}\frac{1}{1+e^{-\beta s}r_0+\alpha\left(1-e^{-\beta s}\right)}\right)\left(\frac{x}{x+t}\right)^{\theta}}\right)$$
$$\times\left(\sum_{k=0}^{m-t-1}\left(\prod_{s=1}^{k}\frac{1}{1+e^{-\beta s}r_0+\alpha\left(1-e^{-\beta s}\right)}\right)\left(\frac{x+t}{x+t+k}\right)^{\theta}\right) \tag{19}$$

Cadangan Zillmer dengan Distribusi Pareto dan Tingkat Bunga CIR

Cadangan Zillmer merupakan modifikasi cadangan premi dengan perhitungan menggunakan cadangan prospektif dan tingkat Zillmer senilai α. Dalam cadangan Zillmer, *loading* merupakan selisih antara premi kotor dan premi bersih pada tahun polis ke-1 bernilai lebih besar dibanding *loading standard*, sehingga perlu dicari cara agar *loading* tersebut menjadi lebih kecil. Tingkat Zillmer α dimisalkan sebesar 0,025 (Olivieri & Pitacco, 2015).

Dengan pembayaran premi selama m tahun, maka premi yang akan dibayarkan peserta asuransi yang berusia x tahun dapat diilustrasikan dengan garis waktu pada Gambar 2.



Gambar 2. Garis Waktu Premi Modifikasi
Sumber: (Chan & Tse, 2022).

Dari garis waktu pada Gambar 2, diperoleh nilai tunai premi modifikasi total pendapatan premi selama jangka waktu pertanggungan adalah tetap, dan yang berubah hanyalah proses pengumpulan premi bersih, sehingga untuk nilai P_1 dan P_2 dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut:

$${}_mP_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x:\overline{m}|} = P_1 + P_2\left(\ddot{a}_{x:\overline{h}|}-1\right) + P\left(\ddot{a}_{x:\overline{m}|}-\ddot{a}_{x:\overline{h}|}\right) - \left(\ddot{a}_{x:\overline{h}|}-1\right)$$
$$= P_1 + P\,\ddot{a}_{x:\overline{m}|} - P\,\ddot{a}_{x:\overline{h}|} - {}_mP_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x:\overline{m}|}$$
$$-P_2 = \frac{P_1 + P\,\ddot{a}_{x:\overline{m}|} - P\,\ddot{a}_{x:\overline{h}|} - {}_mP_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}-1} \tag{20}$$

Sehingga diperoleh:

$$P_1 = {}_mP_{x:\overline{n}|} - \alpha + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} \tag{21}$$

$$P_2 = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} + {}_mP_{x:\overline{n}|} \tag{22}$$

Selanjutnya cadangan Zillmer untuk seseorang yang berusia x tahun dengan waktu zillmer h tahun, masa pembayaran selama m tahun, dan masa pertanggungan selama n untuk$(h < m < n)$, dinotasikan dengan ${}^{m}_{t}V^{(hz)}_{x:\overline{n}|}$ untuk $1 \le t \le h$ dinyatakan sebagai berikut:

$$ {}_{t}^{m}V_{x:\overline{n}|}^{(hz)} = A_{x+t:\overline{n-t}|} - \left\{P_2\, \ddot{a}_{x+t:\overline{h-t}|} + {}_{m}P_{x:\overline{n}|}\left(\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} - \ddot{a}_{x+t:\overline{h-t}|}\right)\right\}. \quad (23) $$

Dengan mensubsitusikan persamaan (2.21) ke dalam persamaan (2.22) diperoleh

$$ \begin{aligned} {}_{t}^{m}V_{x:\overline{n}|}^{(hz)} &= A_{x+t:\overline{n-t}|} - \left\{\left(\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} + {}_{m}P_{x:\overline{n}|}\right) \ddot{a}_{x+t:\overline{h-t}|} + {}_{m}P_{x:\overline{n}|}\left(\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} - \ddot{a}_{x+t:\overline{h-t}|}\right)\right\}. \\ &= A_{x+t:\overline{n-t}|} - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} \ddot{a}_{x+t:\overline{h-t}|} - {}_{m}P_{x:\overline{n}|}\, \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} \end{aligned} $$

$$ {}_{t}^{m}V_{x:\overline{n}|}^{(hz)} = \left(A_{x+t:\overline{n-t}|} - {}_{m}P_{x:\overline{n}|}\, \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}\right) - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} \ddot{a}_{x+t:\overline{h-t}|} \quad (24) $$

Dengan mensubsitusikan persamaan (18) ke persamaan (24) diperoleh:

$$ {}_{t}^{m}V_{x:\overline{n}|}^{(hz)} = {}_{t}^{m}V_{x:\overline{n}|} - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} \ddot{a}_{x+t:\overline{h-t}|} \quad (25) $$

Cadangan Zillmer dari peserta asuransi yang berusia x tahun dengan jangka pertanggungan sebesar R selama n tahun dan masa pembayaran selama m tahun dengan nilai Zillmer $\alpha = \gamma$ dan menggunakan tingkat bunga CIR yaitu:

$$ \begin{aligned} {}_{t}^{m}(RV)_{x:\overline{n}|}^{(hz)} = &\Bigg(R \sum_{k=0}^{n-t-1}\left(\prod_{s=1}^{k+1}\frac{1}{1+e^{-\beta s}r_0+\alpha(1-e^{-\beta s})}\right)\left(\left(\frac{x+t}{x+t+k}\right)^{\theta} - \left(\frac{x+t}{x+t+1+k}\right)^{\theta}\right) \\ &+ R\left(\prod_{s=1}^{n-t}\frac{1}{1+e^{-\beta s}r_0+\alpha(1-e^{-\beta s})}\right)\left(\frac{x+t}{x+t+(n-t)}\right)^{\theta}\Bigg) \\ &+\left(\frac{R\sum_{t=0}^{n-1}\left(\prod_{s=1}^{t+1}\frac{1}{1+e^{-\beta s}r_0+\alpha(1-e^{-\beta s})}\right)\left(\left(\frac{x}{x+t}\right)^{\theta}-\left(\frac{x}{x+t+1}\right)^{\theta}\right)}{\sum_{t=0}^{m-1}\left(\prod_{s=1}^{t}\frac{1}{1+e^{-\beta s}r_0+\alpha(1-e^{-\beta s})}\right)\left(\frac{x}{x+t}\right)^{\theta}}\right. \\ &\left.+\frac{R\left(\prod_{s=1}^{n}\frac{1}{1+e^{-\beta s}r_0+\alpha(1-e^{-\beta s})}\right)\left(\frac{x}{x+n}\right)^{\theta}}{\sum_{t=0}^{m-1}\left(\prod_{s=1}^{t}\frac{1}{1+e^{-\beta s}r_0+\alpha(1-e^{-\beta s})}\right)\left(\frac{x}{x+t}\right)^{\theta}}\right) \\ &\times\left(\sum_{k=0}^{m-t-1}\left(\prod_{s=1}^{k}\frac{1}{1+e^{-\beta s}r_0+\alpha(1-e^{-\beta s})}\right)\left(\frac{x+t}{x+t+k}\right)^{\theta}\right) \\ &-\left(\frac{\gamma}{\sum_{t=0}^{h-1}\left(\prod_{s=1}^{t}\frac{1}{1+e^{-\beta s}r_0+\alpha(1-e^{-\beta s})}\right)\left(\frac{x}{x+t}\right)^{\theta}}\right. \\ &\left.\times\left(\sum_{k=0}^{h-t-1}\left(\prod_{s=1}^{k}\frac{1}{1+e^{-\beta s}r_0+\alpha(1-e^{-\beta s})}\right)\left(\frac{l_{x+t+k}}{l_{x+t}}\right)\right)\right). \end{aligned} $$

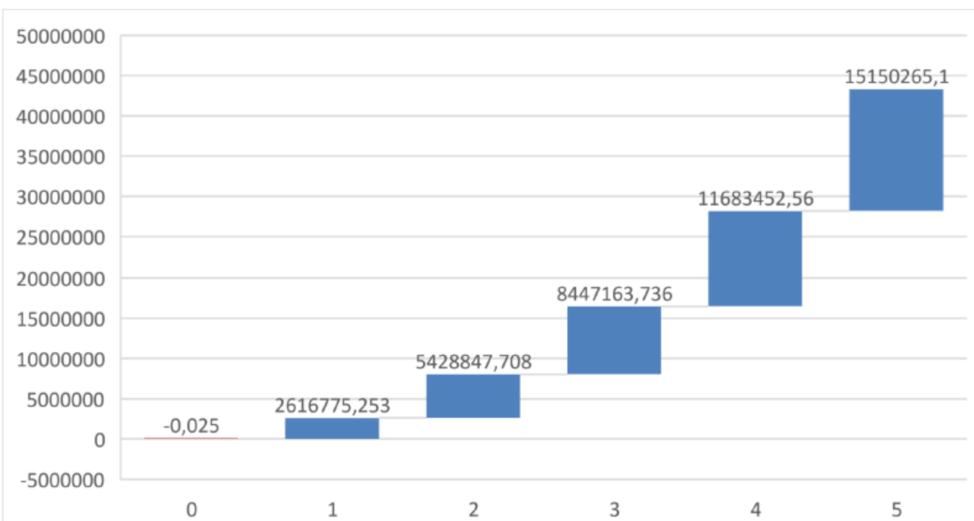
Contoh 1.

Seorang pria berumur 35 tahun mengikuti asuransi jiwa dwiguna perorangan dengan jangka waktu 20 tahun, masa pembayaran premi selama 18 tahun, dan waktu Zillmer selama 8 tahun. Jika uang pertanggungan yang diterima oleh ahli waris sebesar Rp100.000.000,00 dan digunakan tingkat bunga Indonesia dari tahun 2010 sampai 2019 maka akan ditentukan cadangan Zillmer asuransi jiwa dwiguna dengan menggunakan distribusi Pareto dan tingkat bunga CIR.

Perhitungan lengkap cadangan Zillmer asuransi jiwa dwiguna dengan tingkat bunga CIR dari seorang pria berusia 35 tahun dengan waktu Zillmer selama $h = 8$ tahun pada tahun ke$-t$, untuk kedua kasus diatas disajikan dalam Tabel 1 dan Gambar 3.
Berdasarkan Tabel 1 dan Gambar 3, ilustrasi pada Contoh 1 ini memberikan hasil yang baik karena surplus negatif pada cadangan premi hanya terjadi pada tahun polis pertama.

Tabel 1. Cadangan Zillmer untuk Contoh 1

t	**Premi Tunggal (Rp)** $A_{35+t:\overline{20-t}\rvert}$	**Cadangan Zillmer (Rp)** ${}^{18}_{t}V^{(8z)}_{35:\overline{20}\rvert}$
0	34.614.495,31	-0,025
1	36.206.212,90	2.616.775,253
2	37.917.619,94	5.428.847,708
3	39.755.386,83	8.447.163,736
4	41.726.664,13	11.683.452,560
5	43.839.106,26	15.150.265,100



Gambar 3. Besar Cadangan Zillmer untuk Contoh 1

SIMPULAN

Cadangan Zillmer merupakan suatu cara alternatif yang dapat digunakan untuk menentukan besar cadangan yang diperoleh dari premi bersih dengan nilai α yang merupakan tingkat Zillmer. Dalam hal perhitungan cadangan Zillmer menggunakan distribusi Pareto sebagai modifikasi pada cadangan prospektif, maka dengan menggunakan tingkat bunga CIR yang dinyatakan dalam bentuk faktor diskon dan tingkat Zillmer α sebesar 0,025, diperoleh cadangan Zillmer yang semakin meningkat. Tentunya, hal ini akan sangat berguna untuk perusahaan asuransi dalam memprediksi cadangan yang harus dimiliki oleh perusahaan asuransi tersebut.

REFERENSI

Bijma, F., Jonker, M., & van der Vaart, A. W. (2017). *An Introduction to Mathematical Statistics*. Amsterdam University Press.

Chan, W. S., & Tse, Y. K. (2022). *Financial Mathemtics for Actuaries*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Dalpatadu, R. J., & Singh, A. K. (2015). Estimation of Parameters of the Pareto Distribution Using a Minimization Technique. *International Journal of Applied Science and Technology*, *5*(4), 8–10.

Dewi, L., Satyahadewi, N., & Sulistianingsih, E. (2013). Penentuan Cadangan Premi pada Asuransi Jiwa Dwiguna dengan Metode Zillmer. *Buletin Ilmiah Matematika, Statistika Dan Terapannya*, *2*(3), 155–162. http://dx.doi.org/10.26418/bbimst.v2i03.3858.

Dickson, C. D. M., Hardy, M. H., & Waters, H. R. (2020). *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks* (3rd ed.). Cambridge University Press.

Gupta, S. C., & Kapoor, V. K. (2020). *Fundamental of Mathematical Statistics.* (12th ed.). Sultan Chand and Son.

Hasriati, & Nababan, T. P. (2019). Private Premium of Endowment Last Survivor and Joint Life Insurance with Pareto Distribution. *International Journal of Statistical Distribution and Applications*, *4*(5), 76–81. https://doi.org/10.11648/j.ijsd.20190504.11

Hasriati, Nababan, T. P., & Hasbiyati, I. (2020). Reserve of Life Insurance Prospective Dwiguna Joint Life and Last Survivor with Gompertz Law. *Proceedings of the 2nd African International Conference on Industrial Engineering and Operations Management*, 1567–1573.

Iriana, N., Purnamasari, I., & Nasution, Y. N. (2020). Penentuan Cadangan Premi Asuransi Jiwa Seumur Hidup Menggunakan Metode Zillmer. *Jurnal Matematika, Statistika Dan Komputasi*, *16*(2), 219–225. https://doi.org/10.20956/jmsk.v16i2.8312

Kamil, I., Suherman, & Murni, D. (2021). Modifikasi Cadangan Premi Tahunan Retrospektif pada Asuransi Jiwa Berjangka Kasus Joint Life dengan Metode Zillmer. *UNPjoMath*, *4*(2), 12–17. http://dx.doi.org/10.24036/unpjomath.v6i2.11553

Oktavian, M. R., Novinto, D., & Yanuar, F. (2014). Kajian Metode Zillmer, Full Preliminary Term, dan Premium Sufficiency dalam Menentukan Cadangan Premi pada Asuransi Jiwa Dwiguna. *Jurnal Matematika UNAND*, *3*(4), 160–167. https://doi.org/10.25077/jmu.3.4.160-167.2014

Olivieri, A., & Pitacco, E. (2015). *Introduction to Insurance Mathematics. Technical and Financial Features of Risk Transfer* (2nd ed.). In International Publishing.

Rotar, V. I. (2015). *Actuarial Models. The Mathematics of Insurance* (2nd ed.). A Chapman & Hall Book.

Sharpe, J., & Juárez, M. A. (2021). Estimation of the Pareto and Related Distributions – A Reference-Intrinsic Approach. *Communications in Statistics: Theory and Method*, *50*(23), 1–20. https://doi.org/10.1080/03610926.2021.1916826

Sidarto, K. A., Syamsuddin, M., & Sumarti, N. (2019). *Matematika Keuangan*. ITB Press.

Tsao, H. P. (2019). Evolutionary Mathematics And Science For Life Contingency Investigation. In *Evolutionary Progress in Science, Technology, Engineering, Arts, and Mathematics (STEAM)* (Vol. 1).

Utami, R. M., Hasriati, & Aziskhan. (2015). Cadangan Zillmer Status Hidup Gabungan dengan Asumsi Balducci. *JOM FMIPA*, *2*(1), 321–331.

Warsono, Gustavia, E., Kurniasari, D., Amanto, & Antonio, Y. (2019). On the Comparison of the Methods of Parameter Estimation for Pareto Distribution. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series*, 1338. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1338/1/012042