BILANGAN KROMATIK HARMONIS PADA GRAF PAYUNG, GRAF PARASUT, DAN GRAF SEMI PARASUT

Fransiskus Fran[1*)]
Nilamsari Kusumastuti[2)]
Robiandi[3)]
[1,2,3)]Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Tanjungpura
E-mail: fransiskusfran@math.untan.ac.id

ABSTRACT

This article discusses the harmonic coloring of simple graphs G, namely umbrella graphs, parachute graphs, and semi-parachute graphs. A vertex coloring on a graph G is a harmonic coloring if each pair of colors (based on edges or pair of vertices) appears at most once. The chromatic number associated with the harmonic coloring of graph G is called the harmonic chromatic number denoted $\chi_H(G)$. In this article, the exact values of harmonic chromatic numbers are obtained for umbrella graphs, parachute graphs, and semi-parachute graphs.

Keywords: vertex coloring, pair of colors, chromatic number.

ABSTRAK

Pada artikel ini dibahas pewarnaan harmonis pada suatu graf sederhana G, yang merupakan graf payung, graf parasut dan graf semi parasut. Pewarnaan titik pada graf G merupakan pewarnaan harmonis jika masing-masing pasang warna (berdasarkan sisi atau pasangan titik) muncul maksimal satu kali. Bilangan kromatik yang terkait dengan pewarnaan harmonis pada graf G disebut bilangan kromatik harmonis dilambangkan $\chi_H(G)$. Pada artikel ini, diperoleh nilai eksak bilangan kromatik harmonis untuk graf payung, graf parasut, dan graf semi parasut.

Kata Kunci: pewarnaan titik, pasangan warna, bilangan kromatik.

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan teori yang berkaitan dengan beberapa cabang ilmu matematika di antaranya aljabar dan kombinatorika. Permasalahan yang terkait, dapat diselesaikan salah satunya dengan terlebih dahulu mentransformasikan masalah tersebut ke dalam graf, menggunakan representasi titik dan garis. Kemudian, melakukan analisis yang sesuai berdasarkan konsep yang ada dalam teori graf.

Terdapat beberapa kajian dalam teori graf, diantaranya terkait pewarnaan graf. Pada artikel ini, dibahas pewarnaan titik pada graf dengan penambahan syarat tertentu yang disebut pewarnaan harmonis. Konsep pewarnaan harmonis pada suatu graf dikemukakan oleh Harary dan Plantholt pada 1982. Pewarnaan harmonis dikembangkan berdasarkan pewarnaan titik (*proper vertex coloring*) dengan masing-masing pasang warna maksimal muncul satu kali. Penelitian terkait pewarnaan harmonis pada beberapa kelas graf telah dilakukan beberapa peneliti, diantaranya pada *middle graph* dari $C(C_n)$, $C(K_{1,n})$, dan $C(P_n)$ (Vernold Vivin & Akbar Ali, 2009), *middle graph* dari *quadrilateral snake graphs* (Mansuri & Chandel, 2021), keluarga graf bintang ganda (Venkatachalam dkk., 2012), pohon (Aflaki dkk., 2016), pohon dengan derajat maksimum (Akbari dkk., 2012), graf ulat (Takaoka dkk., 2015), *graph powers* (Kierstead dkk., 2020). Penelitian lainnya adalah terkait algoritma pewarnaan harmonis (Kolay dkk., 2016), kasus khusus pewarnaan harmonis, harmonis-1 (Liu dkk., 2019), pewarnaan harmonis pada graf berarah (Hegde & Castelino, 2015; Indriani & Budayasa, 2020) dan aplikasi pewarnaan harmonis (Selvi & Amutha, 2020).

Pada artikel ini, pewarnaan harmonis secara khusus dibahas untuk graf payung, graf parasut, dan graf semi parasut. Masing-masing graf ini merupakan graf yang dibentuk dari graf kipas dan merupakan keluarga graf sederhana, terhubung, dan tak berarah. Graf payung $U_{m,n}$ adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan graf lintasan P_n pada titik pusat graf kipas $F_{1,m}$ (Ghodasara & Patel, 2017; Rahmadi dkk., 2017). Himpunan titik graf payung $U_{m,n}$ adalah $V(U_{m,n}) = \{\mathrm{a}, v_i, u_j \mid i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n-1\}$ dan himpunan sisinya $E(U_{m,n}) = \{(\mathrm{a}, u_1), (\mathrm{a}, v_i) \mid i = 1,2,\cdots,m\} \cup \{(v_i, v_{i+1}) \mid i = 1,2,\cdots,m-1\} \cup \{(u_j, u_{j+1}) \mid j = 1,2,\cdots,n-2\}$, sehingga diperoleh bahwa $|V(U_{m,n})| = m + n$ dan $|E(U_{m,n})| = 2m + n - 2$ dengan $\Delta(U_{m,n}) = m + 1$. Graf parasut dilambangkan PC_n untuk $n \geq 3$ adalah graf dengan himpunan titik $V(PC_n) = \{\mathrm{a}, v_i, u_j \mid i, j = 1,2,\cdots,n\}$ dan himpunan sisinya adalah $E(PC_n) = \{(\mathrm{a}, v_i), (v_1, u_1), (v_n, u_n) \mid i = 1,2,\cdots,n\} \cup \{(v_i, v_{i+1}), (u_j, u_{j+1}) \mid i, j = 1,2,\cdots,n-1\}$. Nilai kardinalitas untuk himpunan titik dan himpunan sisi graf parasut adalah $|V(PC_n)| = 2n + 1$ dan $|E(PC_n)| = 3n$ dengan $\Delta(PC_n) = n$ (Ponraj dkk., 2022). Graf semi parasut dinotasikan SP_{2n-1} adalah sebuah graf yang memiliki himpunan titik $V(SP_{2n-1}) = \{\mathrm{a}, v_i, u_j \mid i = 1,2,\cdots,n \text{ dan } j = 1,2,\cdots,n-1\}$ dan himpunan sisi $E(SP_{2n-1}) = \{(\mathrm{a}, v_i), (v_1, v_n), (v_j, u_j), (u_j, v_{j+1}) \mid i = 1,2,\cdots,n \text{ dan } j = 1,2,\cdots,n-1\}$ sehingga nilai $|V(SP_{2n-1})| = 2n$ dan $|E(SP_{2n-1})| = 3n - 1$ dengan $\Delta(SP_{2n-1}) = n$ (Aprilia dkk., 2014). Dari ketiga graf tersebut, selanjutnya diterapkan pewarnaan harmonis sehingga diperoleh nilai eksak bilangan kromatik harmonisnya.

Nilai eksak bilangan kromatik harmonis masing-masing graf (khususnya untuk kelas-kelas graf) tidak selalu dapat ditentukan dengan mudah, hal ini terkait dengan karakteristik masing-masing graf, seperti banyaknya titik, banyaknya sisi, ketetanggaan antar titik, derajat maksimum titik, dan parameter-parameter lainnya. Oleh karena itu, pada artikel ini, untuk graf payung $U_{m,n}$, nilai eksak bilangan kromatik harmonis ditentukan hanya untuk kondisi ketika $m \geq n$. Untuk $m < n$ diperlukan analisis lebih lanjut sehingga diperoleh bilangan kromatik harmonisnya. Selain itu, pada artikel ini juga dibahas alternatif pembuktian untuk menunjukkan nilai eksak bilangan kromatik harmonis pada graf parasut yang sebelumnya telah diperoleh dari penelitan lainnya (Huilgol & Sriram, 2016).

METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini berupa kajian pustaka terkait teori tentang pewarnaan harmonis pada suatu graf G. Teori tersebut diterapkan pada graf payung $U_{m,n}$, graf parasut PC_n, dan graf semi parasut SP_{2n-1}. Tahapan yang dilakukan untuk memperoleh bilangan kromatik harmonis yaitu menerapkan pewarnaan titik pada graf payung $U_{m,n}$, graf parasut PC_n, dan graf semi parasut SP_{2n-1} untuk beberapa nilai n yang berbeda. Jika untuk setiap titik dengan warna x dan y, pasangan warna $(x, y) = (y, x)$ untuk titik-titik bertetangga pada graf berbeda, maka graf memenuhi definisi pewarnaan harmonis. Jika banyak warna yang digunakan sudah minimum maka diperoleh bilangan kromatik harmonis untuk graf payung $U_{m,n}$, graf parasut PC_n, dan graf semi parasut SP_{2n-1}. Kemudian ditentukanlah pola pewarnaan harmonis pada titik-titik untuk masing-masing graf serta pola bilangan kromatik harmonisnya (untuk beberapa nilai n yang digunakan). Dari pola yang terlihat, diperoleh rumus bilangan kromatik harmonis pada masing-masing graf untuk memperoleh nilai eksaknya.

HASIL DAN PEMBAHASAN

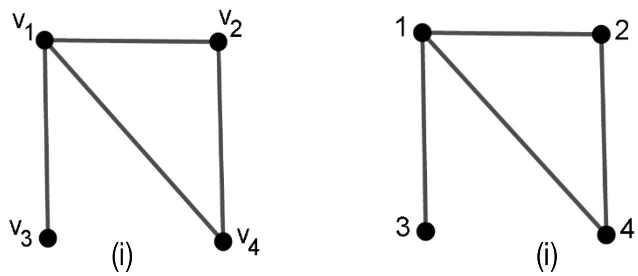
Pada pewarnaan graf, terdapat masalah yang dikaji berupa optimalisasi banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan suatu graf G. Banyaknya warna yang optimal dapat berarti maksimum atau minimum, tergantung pewarnaan yang digunakan. Untuk pewarnaan titik, mensyaratkan bahwa titik-titik bertetangga di G diwarnai dengan warna yang berbeda. Lebih lanjut, banyaknya warna yang optimal (minimum) pada pewarnaan titik untuk graf G disebut bilangan kromatik, dinotasikan $\chi(G)$ (Munir, 2010). Selanjutnya, berdasarkan pewarnaan titik, dapat didefinisikan pewarnaan harmonis seperti dinyatakan yang pada Definisi 1.

Definisi 1 (Vernold Vivin & Akbar Ali, 2009) *Diberikan graf sederhana* $G = \big(V(G), E(G)\big)$.

(i) *Pewarnaan harmonis merupakan pewarnaan titik sehingga pasangan-pasangan warna yang terbentuk, paling banyak muncul satu kali.*

(ii) *Bilangan kromatik harmonis untuk graf* G *dilambangkan dengan* $\chi_H(G)$, *menyatakan jumlah optimal (minimum) warna yang dapat digunakan pada pewarnaan harmonis.*

Contoh 1 Diberikan graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G) = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_4)\}$. Graf G tersebut dapat direpresentasikan dan diwarnai seperti pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf G dengan Pewarnaan Harmonis

Berdasarkan Gambar 1, pewarnaan pada graf G menggunakan label warna dengan 1,2,3, dan 4 serta memiliki $|V(G)| = |E(G)| = 4$ dengan $\chi_H(G) = 4$. Berdasarkan Definisi 1(i), untuk masing-masing pasangan warna muncul maksimal 1 kali, yaitu $(1,2), (1,3), (1,4)$ dan $(2,4)$. Hal ini berarti, pasangan warna muncul setidaknya sebanyak sisi (pasangan titik). Untuk graf tak berarah, diketahui bahwa sisi $(u, v) = (v, u)$. Akibatnya, untuk warna x dan y, pasangan warna $(x, y) = (y, x)$. Dengan demikian, untuk w jenis warna dapat diperoleh banyaknya pasangan warna berdasarkan kombinasi $\binom{w}{2}$. Jika G adalah graf dengan n titik dan dapat diterapkan pewarnaan harmonis dengan w jenis warna, maka berlaku:

$$|E(G)| \leq \binom{w}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad |E(G)| \leq \frac{w(w-1)}{2} \tag{1}$$

Relasi (1) selanjutnya dapat digunakan utuk memperoleh bilangan kromatik harmonis berdasarkan pewarnaan harmonis yang dilakukan pada suatu graf.

Graf G pada Gambar 1 (a) memiliki titik yang berderajat maksimum yaitu titik v_1 dinotasikan dengan $d(v_1) = 3$, akibatnya $\Delta(G) = 3$. Berdasarkan Definisi 1(i), jika titik v_1 diwarnai dengan warna 1, titik-titik disekitar (bertetangga dengan) v_1 dapat diwarnai menggunakan warna $2,3,\cdots,\Delta(G)+1$. Pada pewarnaan harmonis, jika $\Delta(G)$ merupakan derajat maksimum pada graf G dan graf G dapat diwarnai dengan w warna, maka berlaku:

$$w \geq \Delta(G) + 1 \qquad (2)$$

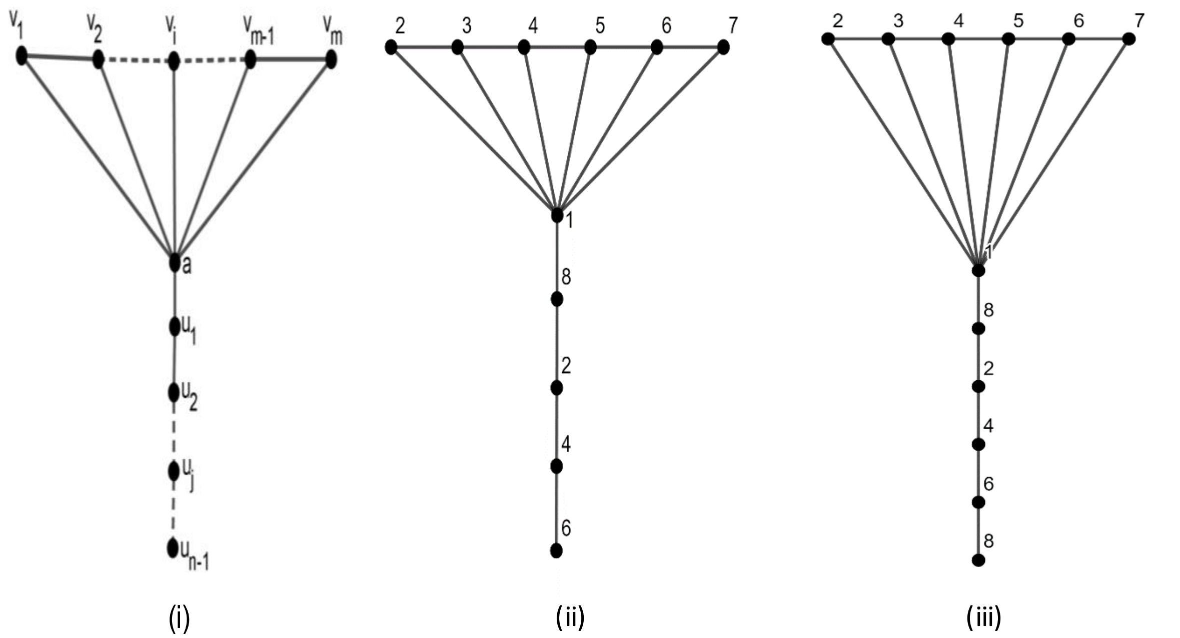
Relasi (2) dapat digunakan sebagai batas bawah untuk menentukan bilangan kromatik harmonis.

Selanjutnya, dapat ditentukan bilangan kromatik harmonis untuk graf payung, graf parasut dan graf semi parasut dengan memanfaatkan relasi pada (1) dan (2). Untuk masing-masing graf tersebut, bilangan kromatik harmonisnya dinyatakan pada Teorema 1 hingga Teorema 3. Secara khusus, untuk graf payung $U_{m,n}$ bilangan kromatik yang ditentukan hanya untuk kondisi ketika $m \geq n$.

Teorema 1 Diberikan graf payung $U_{m,n}$, maka $\chi_H(U_{m,n}) = m + 2$, untuk $m \geq n$.

Bukti :

Diberikan graf payung $U_{m,n}$, $m \geq n$ dengan $V(U_{m,n}) = \{\mathrm{a}, v_i, u_j \mid i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n-1\}$ dan $E(U_{m,n}) = \{(\mathrm{a},u_1),(\mathrm{a},v_i) \mid i = 1,2,\cdots,m\} \cup \{(v_i,v_{i+1}) \mid i = 1,2,\cdots,m-1\} \cup \{(u_j,u_{j+1}) \mid j = 1,2,\cdots,n-2\}$.



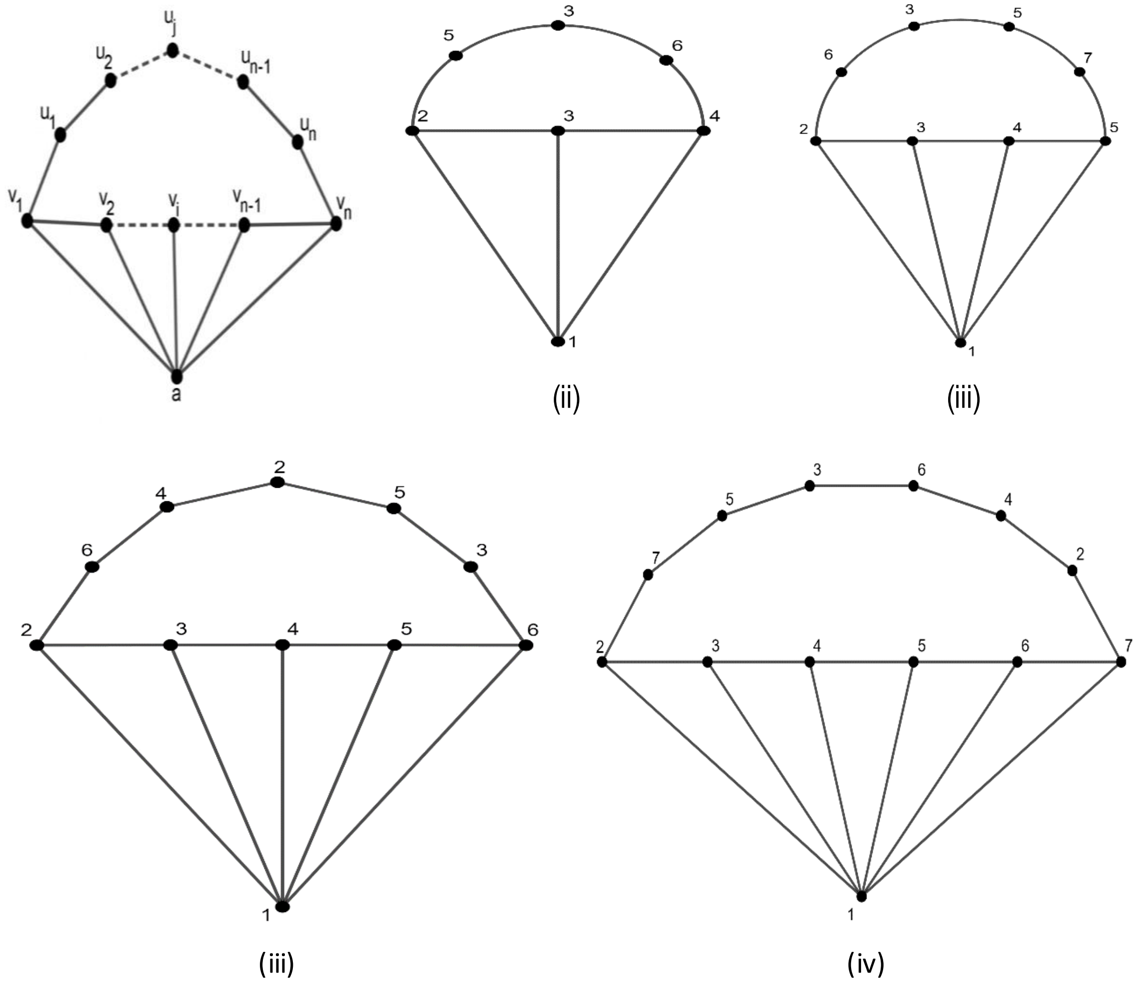
Gambar 2. (i) Graf Payung $U_{m,n}$, (ii) Pewarnaan Harmonis di $U_{6,5}$, (iii) Pewarnaan Harmonis di $U_{6,6}$

Titik dengan derajat maksimum pada graf payung $U_{m,n}$ adalah titik a dan $\Delta(U_{m,n}) = m + 1$.Berdasarkan (2), diperoleh $\chi_H(U_{m,n}) \geq m + 2$. Oleh karena titik a bertetangga dengan titik u_1 dan v_i, $i = 1,2,3,\dots,m$, menurut Definisi 1, untuk mewarnai titik-titik tersebut diperlukan $m + 2$ warna berbeda. Disisi lain, terdapat titik u_2 hingga u_{n-1} yang belum diwarnai dengan $n - 1$ pasangan titik yang terbentuk, sehingga diperlukan pasangan warna sebanyak $n - 1$. Karena

(u_j, u_{j+1}) sisi di $U_{m,n}, j = 1,2, \cdots, n-2$ berarti pewarnaan untuk titik u_2 hingga u_{n-1} dapat menggunakan warna yang sudah digunakan. Untuk $m > n$, warna pada v_{2j-3} dapat digunakan untuk mewarnai u_j, $j = 2,3, \cdots, n-1$. Sedangkan untuk $m = n$, warna pada v_{2j-3} dapat digunakan untuk mewarnai u_j, $j = 2,3, \cdots, n-2$ dan warna pada u_1 dapat digunakan untuk mewarnai u_{n-1} Akibatnya, karena $\chi_H(U_{m,n}) \geq m+2$ dan $m+2$ warna dapat digunakan untuk mewarnai graf $U_{m,n}$ untuk $m \geq n$ dengan pewarnaan harmonis, diperoleh $\chi_H(U_{m,n}) = m+2$. ■

Teorema 2 Diberikan graf parasut PC_n, maka $\chi_H(PC_n) = \begin{cases} n+3, & 3 \leq n \leq 4 \\ n+1, & n \geq 5 \end{cases}$.

Bukti :
Diberikan graf parasut PC_n, $n \geq 3$ dengan himpunan titik dan sisinya yaitu:
$V(PC_n) = \{\mathrm{a}, v_i, u_j \mid i = 1,2, \cdots, n \text{ dan } j = 1,2, \cdots, n\}$
$E(PC_n) = \{(\mathrm{a}, v_i), (v_1, u_1), (v_n, u_n) \mid i = 1,2, \cdots, n\} \cup \{(v_i, v_{i+1}), (u_j, u_{j+1}) \mid i, j = 1,2, \cdots, n-1\}$.
Titik dengan derajat maksimum pada graf parasut PC_n adalah titik a dan $\Delta(PC_n) = n$. Akibatnya, $\chi_H(PC_n) \geq n+1$.



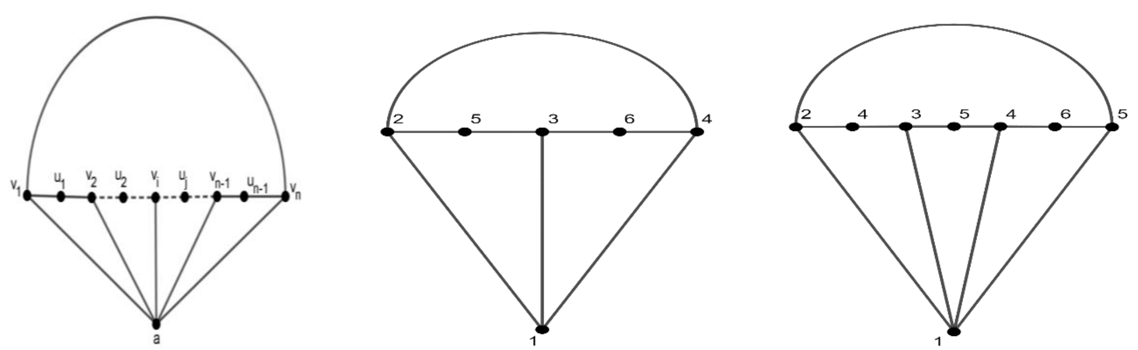
Gambar 3. Graf Parasut PC_n dan Pewarnaan Harmonis pada PC_3, PC_4, PC_5, PC_6

Diketahui bahwa, $\chi_H(PC_n) \geq n+1$. Untuk $3 \leq n \leq 4$, berdasarkan pewarnaan harmonis pada Gambar 3(i) dan 3(ii) diperoleh bahwa graf PC_n dapat diwarnai dengan $n+3$, dan tidak dapat diwarnai dengan $n+2$ warna. Akibatnya, $\chi_H(PC_n) = n+3,\ 3 \leq n \leq 4$. Untuk $n \geq 5$, menurut Definisi 1(i), titik-titik v_i untuk $i = 1,2,3, \dots, n$ bertetangga dengan titik a, masing-masing titik tersebut harus diwarnai dengan warna berbeda. Oleh karena itu, terdapat $n+1$ warna berbeda yang digunakan. Namun demikian, masih terdapat titik u_1 hingga u_n yang belum diwarnai. Titik $u_1, u_2, \dots, u_n$, masing-masing berderajat 2 artinya penambahan warna baru untuk mewarnai titik-titik tersebut tidak diperlukan (dapat menggunakan warna dari v_i). Misalnya untuk n ganjil, $u_i, i = 1,2, \cdots, \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$ dapat diwarnai dengan warna pada $v_{n-2(i-1)}$ dan untuk i lainnya, u_i dapat diwarnai dengan warna pada $v_{n-2(i-3)+1}$ (ilustrasi pada Gambar 3(iii) dan 3(iv)). Jadi, untuk $n \geq 5$, graf PC_ndapat diwarnai dengan $n+1$ warna (dengan pewarnaan harmonis). Akibatnya, karena diketahui pula $\chi_H(PC_n) \geq n+1$, maka dapat disimpulkan $\chi_H(PC_n) = n+1$. ■

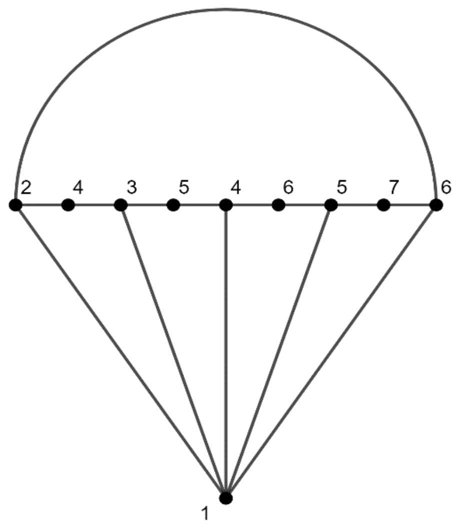
Teorema 3 Diberikan graf semi parasut, maka

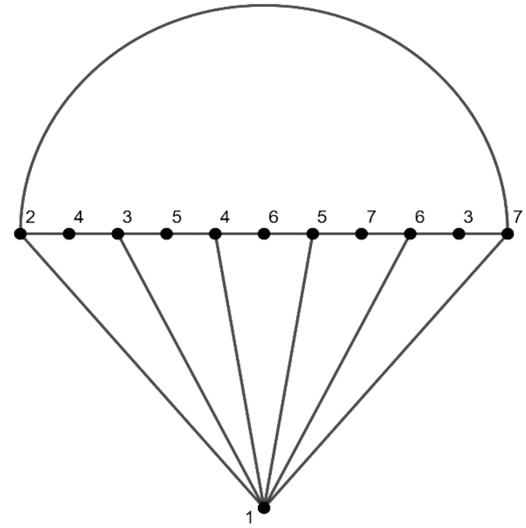
$$\chi_H(SP_{2n-1}) = \begin{cases} 6, & n = 3 \\ n+2, & 4 \leq n \leq 5. \\ n+1, & n \geq 6 \end{cases}$$

Bukti :
Diberikan graf semi parasut $SP_{2n-1},\ n \geq 3$ dengan himpunan titik dan sisinya yaitu:
$V(SP_{2n-1}) = \{\mathrm{a}, v_i, u_j \mid i = 1,2, \cdots, n \text{ dan } j = 1,2, \cdots, n-1\}$
$E(SP_{2n-1}) = \{(\mathrm{a}, v_i), (v_1, v_n), (v_j, u_j), (u_j, v_{j+1}) \mid i = 1,2, \cdots, n \text{ dan } j = 1,2, \cdots, n-1\}$.
Titik dengan derajat maksimum pada graf semi parasut SP_{2n-1} adalah titik a dan $\Delta(SP_{2n-1}) = n$. Akibatnya, $\chi_H(SP_{2n-1}) \geq n+1$.



(i) (ii) (iii)





Gambar 4 Graf Semi Parasut SP_{2n-1} dan Pewarnaan Harmonis graf SP_{2n-1}, $3 \leq n \leq 6$

Diketahui bahwa $\chi_H(SP_{2n-1}) \geq n+1$. Untuk $n = 3$, berdasarkan pewarnaan harmonis pada Gambar 4(ii) diperoleh bahwa $\chi_H(SP_{2n-1}) = 6$ (graf SP_{2n-1} tidak dapat diwarnai dengan $n+1$ atau $n+2$ warna). Untuk $4 \leq n \leq 5$, berdasarkan pewarnaan harmonis pada Gambar 4(iii) dan 4(iv) diperoleh bahwa $\chi_H(SP_{2n-1}) = n+2$ (graf SP_{2n-1} tidak dapat diwarnai dengan $n+1$ warna). Selanjutnya, untuk $n \geq 6$, menurut Definisi 1(i), diperlukan $n+1$ warna untuk mewarnai titik-titik v_i, $i = 1,2,\cdots,n$ dan titik a (titik-titik v_i bertetangga dengan titik a. Namun demikian, terdapat titik u_j untuk $j = 1,2,\cdots,n-1$ yang belum diwarnai. Diketahui bahwa, u_j bertetangga dengan v_j dan v_{j+1}. Oleh karena itu, titik u_j dapat diwarnai dengan warna yang sama dengan v_{j+2}, $j = 1,2,3,\ldots,n-2$ dan untuk titik u_{n-1} diwarnai sama dengan v_2 (ilustrasi pada Gambar 4(iv)). Artinya titik-titik u_j, untuk $j = 1,2,3,\ldots,n-1$ dapat diwarnai dengan warna yang sudah digunakan. Jadi, graf SP_{2n-1} dapat diwarnai dengan n +1 warna (dengan pewarnaan harmonis). Akibatnya, karena diketahui pula bahwa $\chi_H(SP_{2n-1}) \geq n+1$, maka $\chi_H(SP_{2n-1}) = n+1$. ∎

SIMPULAN

Bilangan kromatik harmonis suatu graf G dinotasikan $\chi_H(G)$ menyatakan minimum banyaknya warna sehingga graf G dapat diwarnai dengan pewarnaan harmonis. Nilai $\chi_H(G)$ dapat diperoleh berdasarkan pewarnaan harmonis yang dilakukan maupun dengan memanfaatkan relasi terkait batas atas atau batas bawah bilangan kromatik harmonis. Pewarnaan harmonis dilakukan dengan mewarnai titik-titik di graf G sehingga pasangan warna yang terbentuk dari warna-warna yang digunakan muncul maksimal satu kali. Berdasarkan analisis yang dilakukan, hasil yang diperoleh:

1. $\chi_H(U_{m,n}) = m+2,\ m \geq n.$
2. $\chi_H(PC_n) = \begin{cases} n+3, & 3 \leq n \leq 4 \\ n+1, & n \geq 5 \end{cases}$.

3. $\chi_H(SP_{2n-1}) = \begin{cases} 6, & n = 3 \\ n+2, & 4 \le n \le 5 \\ n+1, & n \ge 6 \end{cases}$.

REFERENSI

Aflaki, A., Akbari, S., Eskandani, D. S., Jamaali, M., & Ravanbod, H. (2016). On The Harmonious Colouring of Trees. *Ars Comb.*, *128*, 55–62.

Akbari, S., Kim, J., & Kostochka, A. (2012). Harmonious coloring of trees with large maximum degree. *Discrete Mathematics*, *312*(10), 1633–1637.

Aprilia, K. R., Agustin, I. H., & Dafik, D. (2014). Pelabelan Total Super (a, d)-sisi Antimagic pada Graf Semi Parasut SP2n− 1. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematik*, *1*(1).

Ghodasara, G. V, & Patel, M. J. (2017). Some new combination graphs. *International journal of mathematics and its applications*, *5*(2-A), 153–161.

Hegde, S. M., & Castelino, L. P. (2015). Harmonious colorings of digraphs. *Ars Combinatoria*, *119*, 339–352.

Huilgol, M. I., & Sriram, V. (2016). On the harmonious coloring of certain class of graphs. *Journal of Combinatorics, Information & System Sciences*, *41*(1–3), 17.

Indriani, S., & Budayasa, I. K. (2020). Bilangan Pewarnaan Harmonis pada Graf Berarah. *Mathunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, *8*(1), 45–54.

Kierstead, H. A., Yang, D., & Yi, J. (2020). On coloring numbers of graph powers. *Discrete Mathematics*, *343*(6), 111712.

Kolay, S., Pandurangan, R., Panolan, F., Raman, V., & Tale, P. (2016). Harmonious coloring: Parameterized algorithms and upper bounds. *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, *9941 LNCS*, 245–256. https://doi.org/10.1007/978-3-662-53536-3_21

Liu, J.-B., Arockiaraj, M., & Nelson, A. (2019). Tight bounds on 1-harmonious coloring of certain graphs. *Symmetry*, *11*(7), 917.

Mansuri, A., & Chandel, R. S. (2021). Harmonious Coloring of Middle Graph of Quadrilateral Snake Graphs. *Sohag Journal of Mathematics An International Journal*, *8*(3), 93–97.

Munir, R. (2010). Matematika Diskrit Ed ke-3. *Bandung: Informatika*.

Ponraj, R., Gayathri, A., & Somasundaram, S. (2022). 4-Remainder Cordial Labeling of Parachute, Twig, Kayak Paddale Graph. *Palestine Journal of Mathematics*, *11*(2), 26–37.

Rahmadi, D., Kusmayadi, T. A., & Kuntari, S. (2017). Dimensi Metrik Kuat pada Graf Payung dan Buku Bertumpuk. *Skripsi. Jurusan Matematika Universitas Negri Yogyakarta*.

Selvi, F. T., & Amutha, A. (2020). Optimization of Harmonious Chromatic Number Problem in Green Wireless Access Network. *Journal of Green Engineering*, *10*(4), 1419–1428.

Takaoka, A., Okuma, S., Tayu, S., & Ueno, S. (2015). A note on harmonious coloring of caterpillars. *IEICE TRANSACTIONS on Information and Systems*, *98*(12), 2199–2206.

Venkatachalam, M., Vernold Vivin, J., & Kaliraj, K. (2012). Harmonious coloring on double star graph families. *Tamkang Journal of Mathematics*, *43*(2), 153–158. https://doi.org/10.5556/j.tkjm.43.2012.153-158

Vernold Vivin, J., & Akbar Ali, M. M. (2009). On harmonious coloring of middle graph of C(Cn), C(K1,n) and C(Pn). *Note di Matematica*, *29*(2), 201–211. https://doi.org/10.1285/i15900932v29n2p201