



MODEL EPIDEMIK CAMPAK DENGAN ADANYA VAKSIN PADA POPULASI RENTAN DAN SUPPORT PADA POPULASI TEREKPOSE

Tri Puspa Lestari¹⁾

Yuni Yulida²⁾

Aprida Siska Lestia³⁾

^{1,2,3)}Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Lambung Mangkurat

E-mail: y_yulida@ulm.ac.id

ABSTRACT

Measles is a highly contagious disease and often occurs in children due to malnutrition, especially children with vitamin A deficiency and a weakened immune system. In addition to vaccination, the role of parents is needed in the form of support to control the development of the virus in the body. This measles disease can be modeled through a mathematical model, especially epidemic model. This study aims to explain the formation of a mathematical model of measles, determine the equilibrium point, basic reproduction number, stability analysis, and to perform numerical simulations on the model. The research procedure begins with construct a model using a system of nonlinear differential equations. The basic reproduction number can be determined using the next generation matrix method and analysis of model stability using the linearization method. While numerical simulation has been carried out using the fourth order Runge Kutta method. The result of this study is the formation of a mathematical model of measles with a population consisting of four compartments, namely Susceptible, Exposed, Infected and Recovered. Disease control is carried out in the model, namely vaccines in the Susceptible population and support measures in the Exposed population. From the model formed, two equilibrium points are obtained, namely the disease-free equilibrium point and the endemic equilibrium point. Furthermore, the basic reproduction number formula and analysis of the stability of the model at the disease-free equilibrium point and endemic equilibrium point are also obtained. Finally, a simulation model is presented to support stability analysis and comparison of solutions for the Infected population before being given control support and after being given control support with variations in vaccine percentages.

Keywords: Measles disease, mathematical model, equilibrium point, stability analysis, numerical simulation.

ABSTRAK

Penyakit campak merupakan penyakit yang sangat menular dan sering terjadi pada anak akibat kekurangan gizi, terutama anak-anak dengan defisiensi vitamin A dan sistem kekebalan yang menurun. Selain vaksinasi diperlukan peran orang tua berupa dukungan dan tindakan *support* untuk mengendalikan perkembangan virus di dalam tubuh. Penyakit ini dapat dikaji penyebarannya melalui model epidemik. Penelitian ini bertujuan untuk menjelaskan terbentuknya model matematika penyakit campak, menentukan titik ekuilibrium, bilangan reproduksi dasar, analisis kestabilan, dan melakukan simulasi numerik pada model. Prosedur penelitian ini diawali dengan pembentukan model menggunakan sistem persamaan diferensial nonlinear. Bilangan reproduksi dasar diperoleh menggunakan metode *next generation matrix* dan analisis kestabilan model menggunakan metode linearisasi. Sedangkan untuk simulasi numerik menggunakan metode Runge Kutta orde empat. Hasil penelitian ini adalah terbentuknya model matematika penyakit campak dengan populasi terdiri dari empat kompartemen yaitu *Susceptible*, *Exposed*, *Infected* dan *Recovered*. Pada model diberi kontrol penyakit melalui vaksin pada populasi *Susceptible* dan tindakan *support* pada populasi *Exposed*. Dari model yang terbentuk diperoleh dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Selanjutnya,

diperoleh juga rumus bilangan reproduksi dasar dan hasil analisis kestabilan model pada titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Terakhir, disajikan simulasi model untuk mendukung analisis kestabilan dan perbandingan solusi untuk populasi *Infected* sebelum diberikan kontrol *support* dan sesudah adanya kontrol *support* dengan variasi persentasi vaksin.

Kata Kunci: Penyakit campak, model matematika, titik ekuilibrium, analisis kestabilan, simulasi numerik.

PENDAHULUAN

Penyakit campak merupakan penyakit yang sangat menular. Campak disebut juga morbili atau *measles* yang berasal dari virus campak (*family Paramyxovirus, genus Morbillivirus*) yang menyebabkan infeksi pada sistem pernapasan dengan gejala bercak merah pada kulit orang yang terinfeksi. Penyakit campak menular dari orang ke orang melalui udara dan air liur yang dikeluarkan penderita saat batuk atau bersin yang memiliki tingkat serangan lebih dari 90% di antara orang-orang yang rentan (Bakare et al., 2012). Campak menjadi penyebab penting kematian anak-anak di seluruh dunia. Campak sering terjadi pada anak akibat kekurangan gizi, terutama anak-anak dengan defisiensi vitamin A dan anak-anak yang sistem kekebalannya menurun karena HIV/AIDS atau penyakit berat lainnya (Kemenkes RI, 2018).

Dalam penelitian (Kholisoh et al., 2012), penyakit campak dapat dicegah dengan melakukan vaksinasi. Namun cakupan vaksinasi di seluruh dunia dengan dosis vaksin pertama masih mencapai 85% saat ini. Vaksin tersebut masih belum mendekati 95% yang diusulkan oleh Organisasi Kesehatan Dunia (WHO) yang dibutuhkan untuk mencegah terjadinya wabah. Akibatnya, banyak orang di beberapa daerah masih berisiko tertular penyakit campak. Selain vaksinasi, penyembuhan dan penanganan penyakit campak juga perlu didukung dengan pemberian asupan makanan yang bergizi, banyak minum air putih, memakai masker saat keluar rumah, memandikan anak setelah demam turun, dan istirahat yang cukup. Makanan yang bergizi dan tinggi serat berfungsi sebagai pendukung sistem imunitas tubuh agar semakin kebal terhadap virus penyakit campak. Oleh karena itu, diperlukan peran orang tua berupa tindakan *support* untuk mengendalikan perkembangan virus di dalam tubuh anak agar tidak menyebar ke organ vital lain, seperti otak dan paru (Haryanugroho, 2019).

Penyakit campak ini, dapat dikaji melalui model matematika yaitu model epidemik. Salah satu model epidemik adalah model SIR yang dirumuskan pertama kali oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927. Model SIR membagi populasi total menjadi 3, yaitu *Susceptible* (*S*) yang menyatakan populasi rentan, *Infected* (*I*) yang menyatakan populasi terinfeksi, dan *Recovered* (*R*) yang mewakili populasi sembuh. Penyakit campak memiliki periode laten atau masa inkubasi yang merupakan masa ketika seseorang terjangkit penyakit campak untuk pertama kalinya. Periode tersebut menyebabkan kelas baru terbentuk yaitu kelas *Exposed* (*E*), sehingga model yang akan dianalisis pada penyebaran penyakit campak ini adalah model SEIR.

Beberapa peneliti yang telah melakukan penelitian tentang penyakit campak di antaranya adalah penelitian (Momoh et al., 2013) membahas mengenai model SEIR dengan melihat efek tindakan pada populasi terekspose. Akibatnya, jika lebih banyak individu pada masa inkubasi melakukan pengobatan dan terapi sebelum dapat menularkan kembali, penyakit tidak akan mengalami kondisi endemik. Penelitian (Edward, 2015), memodifikasi model SEIR dengan menambahkan kompartemen vaksinasi dengan memperhatikan adanya proporsi imigran yang telah divaksin, proporsi populasi yang telah divaksin dua kali, dan laju efektivitas vaksin yang pertama. Kemudian, (Sowole et al., 2019) membentuk model SEIR dengan adanya tingkat *support* untuk mengontrol penyebaran penyakit campak pada populasi terekspose. Selanjutnya, (Ahaya et al., 2020), memodifikasi model yang

diusulkan oleh (Sowole et al., 2019) menjadi model SVEIR dengan menambahkan kompartemen yang telah divaksinasi dan tingkat infeksi ketika individu rentan mengalami kontak dengan individu terinfeksi.

Pada artikel ini, penulis membahas model matematika SEIR penyakit campak dengan kontrol pada kompartemen rentan yang divaksinasi sehingga kebal dan individu yang terekspose diberikan tindakan support sebelum dapat menularkan individu lain. Penelitian ini, mengacu pada penelitian (Sowole et al., 2020). Pada bagian penelitian tersebut, titik ekuilibrium, bilangan reproduksi dasar dan analisis kestabilan pada model ditentukan dengan menggunakan keadaan awal vaksin (laju vaksinasi sama dengan nol). Selanjutnya, bilangan reproduksi dasar tanpa pengaruh vaksinasi diterapkan untuk data pada negara Nigeria. Berdasarkan hal tersebut, penulis melanjutkan tulisan tersebut dengan menyajikan secara khusus dalam penentuan titik ekuilibrium, bilangan reproduksi dasar dan analisis kestabilan yang memuat laju vaksinasi. Kemudian, Penulis melakukan simulasi model untuk mendukung dan memberikan visualisasi pada analisis kestabilan, memperlihatkan simulasi variasi nilai bilangan reproduksi dasar, serta menyajikan pengaruh adanya tindakan *support* dan variasi laju vaksinasi terhadap pertambahan jumlah infeksi pada populasi.

METODE

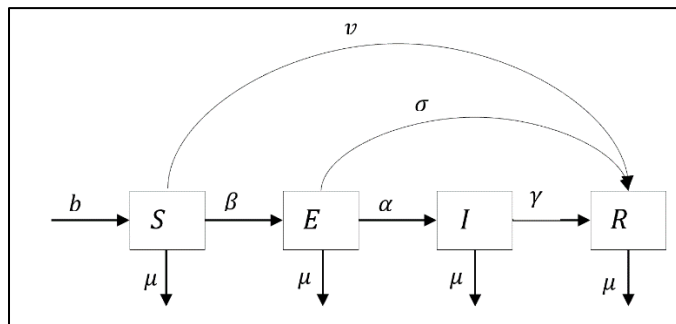
Penelitian ini merupakan kajian teori, dimulai dari mempelajari model-model penyakit campak dan penelusuran teori pendukung dalam pemodelan matematika epidemiologi. Selanjutnya, bentuk model epidemik penyebaran penyakit campak yang digunakan adalah Model Matematika yang dipaparkan (Sowole et al., 2020). Dari model yang terbentuk, ditentukan titik ekuilibrium berupa solusi konstan dari model, dan bilangan reproduksi dasar ditentukan dengan metode *matriks next generation* (Driessche & Watmough, 2008), (Karim & Yulida, 2021). Kemudian, dilakukan analisis kestabilan menggunakan metode linearisasi (menggunakan deret Taylor) di sekitar titik ekuilibrium dan diperoleh Matriks Jacobian (Taylor & Bhathawala, 2012), (Martcheva, 2015), (Jamil et al., 2023). Selanjutnya, jika nilai eigen Matriks Jacobian tersebut sulit ditentukan secara langsung maka digunakan kriteria Routh Hurwitz (Khadijah et al., 2021). Terakhir disajikan simulasi yaitu solusi model dengan menggunakan metode Runge Kutta orde empat (Zill & Cullen, 2009), (Mulyono, 2016), (Lestari et al., 2021). Simulasi yang disajikan, pertama, menyajikan grafik bilangan reproduksi dasar dengan variasi kontrol, kedua menyajikan grafik solusi model dengan parameter yang digunakan memenuhi syarat pada analisis kestabilan, dan ketiga, menyajikan grafik perbandingan jumlah infeksi dengan adanya pengaruh tindakan support dan memberikan variasi laju vaksinasi.

Kajian perkiraan (estimasi) bilangan reproduksi dasar untuk model penyakit campak dapat dipelajari pada artikel (Guerra et al., 2017). Artikel tersebut memaparkan bahwa dari 18 literatur yang telah dikaji dapat disimpulkan bahwa terdapat 58 perkiraan untuk bilangan reproduksi dasar pada penyakit campak. Hasil perkiraan tersebut terdiri dari 10 literatur mengestimasi bilangan reproduksi dasar dalam kisaran 12–18 (nilai ini yang sering digunakan/dikutip); 16 literatur mengestimasi bilangan reproduksi dasar berada di atas kisaran 12–18; 27 literatur mengestimasi bilangan reproduksi dasar berada di bawah kisaran 12–18, dan 5 literatur mengestimasi bilangan reproduksi dasar sesuai dengan yang dilaporkan oleh Anderson dan May dalam rentang 12.1-18. Artikel ini juga menjelaskan bilangan reproduksi dasar sangat bervariasi untuk setiap negara sehingga sangat penting untuk melakukan estimasi bilangan reproduksi dasar secara lokal untuk setiap negara atau daerah.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Model matematika penyebaran penyakit campak dibangun berdasarkan kompartemen populasi sebagaimana penjelasan pada Gambar 1. Berdasarkan penjelasan gambar tersebut, maka model matematika penyebaran penyakit campak mengikuti Model epidemik *SEIR*. Empat kompartemen pada model tersebut terdiri dari kompartemen rentan (*Susceptible*) adalah individu yang sehat tetapi rentan terjangkit penyakit campak disimbolkan $S(t)$, kompartemen terekspose (*Exposed*) adalah individu yang terpapar dan belum bisa menularkan disimbolkan $E(t)$, kompartemen terinfeksi (*Infected*) berisi individu yang telah terinfeksi virus campak dan dapat menularkan disimbolkan $I(t)$, dan kompartemen sembuh dan kebal (*Recovered*), adalah individu yang telah sembuh dari infeksi dan individu yang kebal dari virus setelah divaksin disimbolkan $R(t)$. Dalam rangka mengurangi/menghambat penularan penyakit campak dalam populasi dapat diberikan kontrol vaksin dan tindakan *support* pada model. Kontrol vaksin diberikan pada kompartemen rentan dan tindakan *support* diberikan pada populasi yang terekspose. Pemberian perlakuan kontrol pada model, diharapkan penyakit campak dapat diberantas dalam waktu lebih singkat. Parameter tindakan *support* pada dasarnya cukup sulit diukur, tetapi pada penelitian (Sowole et al., 2019) memberikan gambaran bahwa dalam memperhitungkan hal tersebut, Peneliti mengambil negara Senegal sebagai studi kasus, peneliti melihat efek tindakan *support* sebagai ukuran kontrol pada populasi terekspose. Jika lebih banyak orang pada periode terekspose diberikan tindakan *support* maka akan menurunkan penyebaran penyakit tersebut dan akan berkurang dalam waktu yang lebih singkat.

Diberikan diagram alir Model epidemik penyebaran penyakit campak pada Gambar 1 berikut.



Gambar 1. Diagram alir Model epidemik penyebaran penyakit campak
Sumber (Sowole et al., 2020)

Berdasarkan diagram alir di atas, Model matematika penyakit campak dengan kontrol pada kompartemen rentan dan terekspose dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= b - \beta SI - (v + \mu)S \\
 \frac{dE}{dt} &= \beta SI - (\mu + \alpha + \sigma)E \\
 \frac{dI}{dt} &= \alpha E - (\mu + \gamma)I \\
 \frac{dR}{dt} &= vS + \gamma I + \sigma E - \mu R
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

dengan

- b : laju kelahiran (diasumsikan konstan per satuan waktu)
- v : laju individu rentan yang divaksinasi
- μ : laju kematian alami
- β : laju penularan penyakit
- γ : laju kesembuhan
- σ : laju individu terekspose yang diberikan tindakan support
- α : laju individu terekspose menjadi terinfeksi
- N : total jumlah populasi yaitu $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$

dan semua nilai parameter $b, v, \mu, \beta, \gamma, \sigma, \alpha \geq 0$. (Sowole et al., 2020)

Perubahan total populasi terhadap waktu dapat ditentukan berdasarkan Persamaan (1) diperoleh

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = b - \mu N \quad \text{atau} \quad \frac{dN}{dt} + \mu N = b \quad (2)$$

Persamaan (2) merupakan Persamaan diferensial linier orde satu yang memiliki solusi berupa

$$\begin{aligned} N(t) &= e^{-\int \mu dt} \left(\int b e^{\int \mu dt} dt + C^* \right) \\ &= e^{-\mu t} \left(\frac{b}{\mu} e^{\mu t} + C^* \right) \\ &= \frac{b}{\mu} + C^* e^{-\mu t} \quad \text{dengan } C^* \text{ konstanta} \end{aligned}$$

Jika pada saat $t = 0$ (total populasi $N(0)$) maka dapat diperoleh nilai $C^* = N(0) - \frac{b}{\mu}$, sehingga Solusi Persamaan (2) menjadi $N(t) = \frac{b}{\mu} + \left(N(0) - \frac{b}{\mu} \right) e^{-\mu t} = N(0)e^{-\mu t} + \frac{b}{\mu}(1 - e^{-\mu t})$. Berdasarkan solusi ini, maka total populasi tidak bernilai konstan (berubah terhadap waktu t). Selanjutnya, untuk $t \rightarrow \infty$ diperoleh bahwa $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{b}{\mu}$, (total populasi konvergen ke $\frac{b}{\mu}$). Artinya jika total populasi awal yang diketahui lebih dari $\frac{b}{\mu}$ maka dari waktu ke waktu total populasi akan turun dan akhirnya konvergen ke $\frac{b}{\mu}$. Kemudian, jika total populasi awal yang diketahui kurang dari $\frac{b}{\mu}$ maka dari waktu ke waktu total populasi akan naik dan akhirnya konvergen ke $\frac{b}{\mu}$.

Titik Ekuilibrium dan Bilangan Reproduksi Dasar

Titik ekuilibrium pada Persamaan (1) dapat ditentukan dengan cara menyelesaikan Sistem $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dE}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0$ atau ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
 b - \beta SI - (v + \mu)S &= 0 \\
 \beta SI - (\mu + \alpha + \sigma)E &= 0 \\
 \alpha E - (\mu + \gamma)I &= 0 \\
 vS + \gamma I + \sigma E - \mu R &= 0
 \end{aligned} \tag{3}$$

Jika Sistem (3) diselesaikan maka diperoleh

1. Titik $P_0 = (S^0, E^0, I^0, R^0)$, dengan $S^0 = \frac{b}{v+\mu}$, $E^0 = I^0 = 0$ dan $R^0 = \frac{vb}{\mu(v+\mu)}$, selanjutnya titik ini kita sebut sebagai titik ekuilibrium bebas penyakit.
2. Titik $P_1 = (S^1, E^1, I^1, R^1)$, dengan $S^1 = \frac{(\mu+\gamma)(\mu+\alpha+\sigma)}{\beta\alpha}$, $E^1 = \frac{b}{\mu+\alpha+\sigma} \left[1 - \frac{1}{R_v}\right]$, $I^1 = \frac{\alpha b}{(\mu+\gamma)(\mu+\alpha+\sigma)} \left[1 - \frac{1}{R_v}\right]$ dan $R^1 = \frac{v(\mu+\gamma)(\mu+\alpha+\sigma)}{\mu\beta\alpha} + \frac{b}{\mu(\mu+\alpha+\sigma)} \left(\frac{\alpha\gamma}{\mu+\gamma} + \sigma\right) \left[1 - \frac{1}{R_v}\right]$, selanjutnya titik ini kita sebut titik ekuilibrium endemik.

Nilai R_v merupakan bilangan reproduksi dasar dengan adanya pengaruh vaksinasi dari Persamaan (1). Langkah-langkah menentukan rumusan R_v menggunakan Metode *matriks next generation* sebagai berikut.

- a. Pada Persamaan (1), populasi $x = \begin{bmatrix} E \\ I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ yaitu populasi yang telah terinfeksi dan $y = \begin{bmatrix} S \\ R \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ yaitu populasi yang tidak terinfeksi. Pada Persamaan (1) yang merupakan kelas populasi yang terinfeksi penyakit campak adalah

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dE}{dt} \\ \frac{dI}{dt} \end{bmatrix} = \mathcal{L} - \mathcal{M}, \text{ dengan } \mathcal{L} = \begin{bmatrix} \beta SI \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathcal{M} = \begin{bmatrix} (\mu + \alpha + \sigma)E \\ (\mu + \gamma)I - \alpha E \end{bmatrix}$$

- b. Matriks Jacobian dari \mathcal{L} dan \mathcal{M} di sekitar titik ekuilibrium P_0 dinyatakan secara berturut-turut

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & \beta \frac{b}{v+\mu} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} (\mu + \alpha + \sigma) & 0 \\ -\alpha & (\mu + \gamma) \end{bmatrix}$$

- c. *Matrix next generation* dinyatakan dengan matriks \mathbf{N} , yaitu

$$\mathbf{N} = \mathbf{L}\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{b\alpha\beta}{(v+\mu)(\mu+\alpha+\sigma)(\mu+\gamma)} & \frac{b\beta}{(v+\mu)(\mu+\gamma)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- d. Nilai eigen dari Matriks \mathbf{N} adalah $\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_2 = \frac{b\alpha\beta}{(v+\mu)(\mu+\alpha+\sigma)(\mu+\gamma)}$.
- e. Bilangan reproduksi dasar (dengan adanya vaksinasi, $v > 0$) merupakan nilai eigen dominan dari matriks \mathbf{N} yaitu $R_v = \frac{b\alpha\beta}{(v+\mu)(\mu+\alpha+\sigma)(\mu+\gamma)}$. Selanjutnya, bilangan reproduksi dasar tanpa melibatkan vaksinasi ($v = 0$) dapat dinyatakan sebagai $\frac{b\alpha\beta}{\mu(\mu+\alpha+\sigma)(\mu+\gamma)}$.

Analisis Kestabilan Model

Analisis kestabilan pada Persamaan (1) dilakukan menggunakan metode linearisasi karena model tersebut merupakan Sistem Persamaan Diferensial Nonlinier. Matriks Jacobian yang diperoleh melalui linearisasi Persamaan (1) sebagai berikut.

$$J = \begin{bmatrix} -\beta I - (v + \mu) & 0 & -\beta S & 0 \\ \beta I & -(\mu + \alpha + \sigma) & \beta S & 0 \\ 0 & \alpha & -(\mu + \gamma) & 0 \\ v & \sigma & \gamma & -\mu \end{bmatrix} \quad (4)$$

Selanjutnya, berdasarkan Persamaan (4) diperoleh matriks Jacobian di titik ekuilibrium bebas penyakit yaitu

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -(v + \mu) & 0 & -\beta \frac{b}{v + \mu} & 0 \\ 0 & -(\mu + \alpha + \sigma) & \beta \frac{b}{v + \mu} & 0 \\ 0 & \alpha & -(\mu + \gamma) & 0 \\ v & \sigma & \gamma & -\mu \end{bmatrix} \quad (5)$$

Persamaan karakteristik (Anton et al., 2019) dari Persamaan (5) diperoleh

$$\begin{vmatrix} -(v + \mu) - \lambda & 0 & -\beta \frac{b}{v + \mu} & 0 \\ 0 & -(\mu + \alpha + \sigma) - \lambda & \beta \frac{b}{v + \mu} & 0 \\ 0 & \alpha & -(\mu + \gamma) - \lambda & 0 \\ v & \sigma & \gamma & -\mu - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

Akar-akar persamaan karakteristik dari Persamaan (6) ditentukan menggunakan ekspansi kofaktor diperoleh $\lambda_1 = -\mu$, $\lambda_2 = -(v + \mu)$, sedangkan λ_3 dan λ_4 diperoleh melalui Persamaan (7) berikut

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0 \quad (7)$$

dengan $a_0 = 1$, $a_1 = (\mu + \alpha + \sigma) + (\mu + \gamma) > 0$ dan $a_2 = (\mu + \alpha + \sigma)(\mu + \gamma)(1 - R_v) > 0$ jika $R_v < 1$. Persamaan (7) dapat dibentuk matriks Hurwitz dan dapat diselidiki bahwa $\Delta_1 = |a_1| > 0$ dan $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 > 0$ (karena $\Delta_1 > 0$ dan $a_2 > 0$). Selanjutnya, berdasarkan Kriteria Routh Hurwitz, Persamaan (7) memiliki $Re(\lambda_{3,4}) < 0$ dan disimpulkan bahwa, titik ekuilibrium bebas penyakit E_0 stabil asimtotik lokal jika $R_v < 1$.

Berdasarkan Persamaan (4), Matriks Jacobian di titik ekuilibrium endemik sebagai berikut.

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -(\mu + v)R_v & 0 & -\frac{(\mu + \gamma)(\mu + \alpha + \sigma)}{\alpha} & 0 \\ (\mu + v)(R_v - 1) & -(\mu + \alpha + \sigma) & \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \alpha + \sigma)}{\alpha} & 0 \\ 0 & \alpha & -(\mu + \gamma) & 0 \\ v & \sigma & \gamma & -\mu \end{bmatrix} \quad (8)$$

Persamaan karakteristik dari Persamaan (8) adalah

$$\begin{vmatrix} -(\mu + v)R_v - \lambda & 0 & -\frac{(\mu + \gamma)(\mu + \alpha + \sigma)}{\alpha} & 0 \\ (\mu + v)(R_v - 1) & -(\mu + \alpha + \sigma) - \lambda & \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \alpha + \sigma)}{\alpha} & 0 \\ 0 & \alpha & -(\mu + \gamma) - \lambda & 0 \\ v & \sigma & \gamma & -\mu - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

Akar-akar persamaan karakteristik dari Persamaan (9) ditentukan menggunakan ekspansi kofaktor dan diperoleh $\lambda_1 = -\mu$, sedangkan untuk $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ditentukan melalui Persamaan (10) berikut.

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \quad (10)$$

dengan

$$a_0 = 1, \quad a_1 = (\mu + v)R_v + (\mu + \gamma) + (\mu + \alpha + \sigma) > 0, \quad a_2 = (\mu + v)R_v[(\mu + \gamma) + (\mu + \alpha + \sigma)] > 0 \text{ dan } a_3 = \beta\alpha b \left(1 - \frac{1}{R_v}\right) \text{ jika } R_v > 1.$$

Persamaan (10) dapat dibentuk matrik Hurwitz dan dapat diselidiki bahwa

a. $\Delta_1 = |a_1| = (\mu + v)R_v + (\mu + \gamma) + (\mu + \alpha + \sigma) > 0$

b. $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3$
 $= (\mu + v)^2 R_v^2 [(\mu + \gamma) + (\mu + \alpha + \sigma)] + (\mu + v)R_v [(\mu + \gamma) + (\mu + \alpha + \sigma)]^2 + (\mu + v)(\mu + \gamma)(\mu + \alpha + \sigma) > 0$

c. $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3(a_1a_2 - a_3) = a_3\Delta_2 > 0$ (karena $\Delta_2 > 0$ dan $a_3 > 0$ maka $\Delta_3 > 0$).

Jadi terbukti bahwa $\Delta_{1,2,3} > 0$. Selanjutnya, berdasarkan Kriteria Routh Hurwitz, Persamaan (10) memiliki $Re(\lambda_{2,3,4}) < 0$ dan disimpulkan bahwa titik ekuilibrium endemik E_1 stabil asimtotik lokal jika $R_v > 1$.

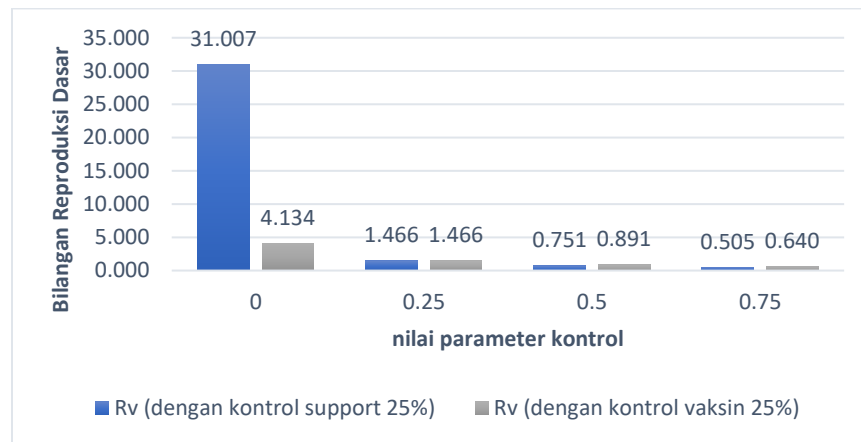
Simulasi Numerik

Diberikan nilai awal untuk populasi *Susceptible* $S(0) = 100$, populasi *Exposed* $E(0) = 40$, populasi *Infected* $I(0) = 15$, dan populasi *Recovered* $R(0) = 10$. Selanjutnya, diberikan Tabel 1 merupakan nilai-nilai parameter yang digunakan dalam simulasi sebagai berikut.

Tabel 1. Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi

Parameter	Nilai	Sumber
b	2.03691	diasumsikan
v	0; 0.25; 0.5; 0.75	diasumsikan
μ	0,01241	(Sowole et al., 2020)
β	0,09091	(Sowole et al., 2020)
γ	0,14286	(Trottier & Philippe, 2012)
σ	0; 0,25; 0.5; 0.75	diasumsikan
α	0,125	(Trottier & Philippe, 2012)

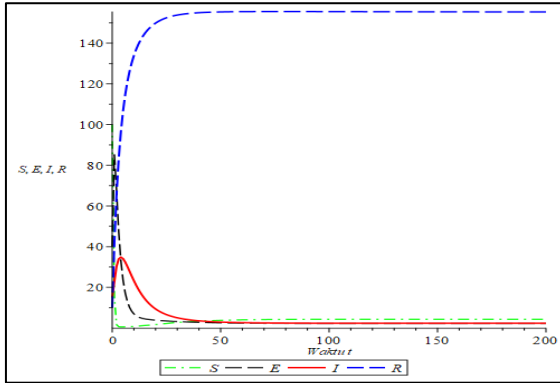
Berikut ini disajikan Gambar 2, pengaruh nilai parameter kontrol terhadap bilangan reproduksi dasar.



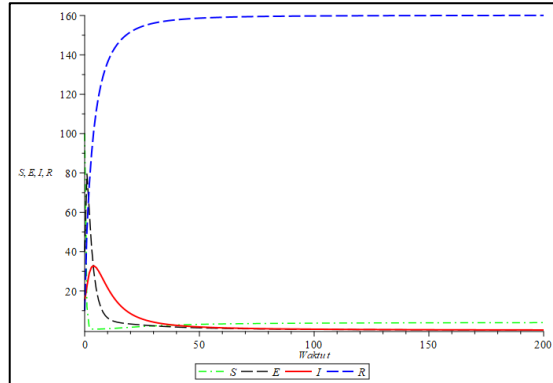
Gambar 2. Diagram batang bilangan reproduksi dasar dengan variasi kontrol

Pada Gambar 2, warna biru adalah bilangan reproduksi dasar yang dihitung menggunakan variasi tingkat vaksinasi (0; 0.25; 0.5; 0.75) dan menggunakan kontrol *support* yang tetap yaitu 25%. Jika pemberian vaksin ditingkatkan maka bilangan reproduksi dasar akan semakin menurun. Kemudian warna abu-abu adalah bilangan reproduksi dasar yang dihitung menggunakan variasi tingkat *support* (0; 0.25; 0.5; 0.75) dan menggunakan kontrol vaksinasi yang tetap yaitu 25%. Jika tingkat *support* ditingkatkan maka bilangan reproduksi dasar semakin menurun. Tetapi, jika dilihat dari perubahan bilangan reproduksi dasar, maka pemberian vaksin (yang meningkat) akan lebih efektif menyebabkan penurunan bilangan reproduksi dasar dibanding dengan pemberian tingkat *support*. Gambar 2 ini juga menjelaskan bahwa nilai bilangan reproduksi dasar cukup bervariasi sesuai kontrol yang diberikan pada populasi, khususnya jika kita lihat dari pemberian kontrol vaksinasi. Hal ini sejalan dengan penjelasan pada artikel (Guerra et al., 2017) yang menyatakan bahwa jika kita ingin melihat seberapa besar bilangan reproduksi dasar untuk penyakit campak maka sangat penting untuk melakukan estimasi bilangan reproduksi dasar sesuai data yang disajikan pada suatu negara/daerah.

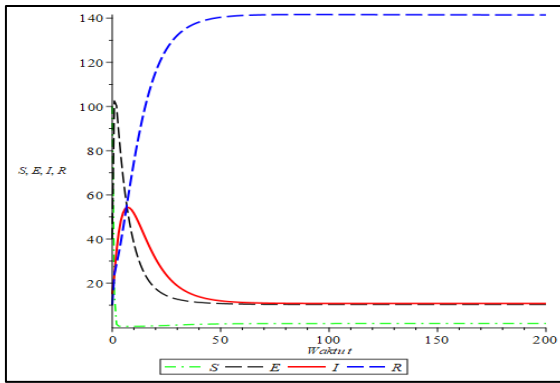
Selanjutnya, disajikan simulasi model melalui grafik solusi pada Gambar 3, 4, 5 dan 6. Simulasi model ini menggunakan nilai parameter pada Tabel 1 dengan memperhatikan syarat pada nilai R_v dan adanya kontrol, sebagai visualisasi dari analisis kestabilan di titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik.



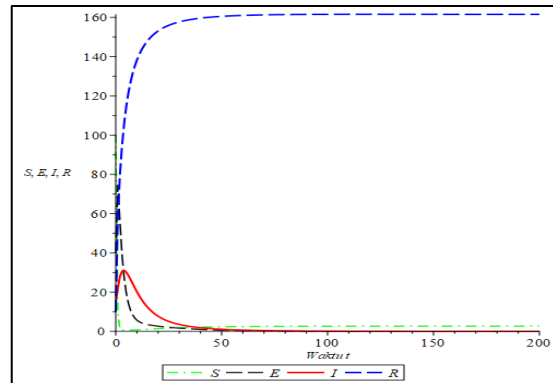
Gambar 3. Simulasi di titik ekuilibrium P_1 , $R_v = 1.466 > 1$, ketika $v = 0.25$ dan $\sigma = 0.25$



Gambar 4. Simulasi di titik ekuilibrium P_0 , $R_v = 0.751 < 1$, $v = 0.5$ dan $\sigma = 0.25$



Gambar 5. Simulasi di titik ekuilibrium P_1 , $R_v = 4.134 > 1$, ketika $v = 0.25$ dan $\sigma = 0$



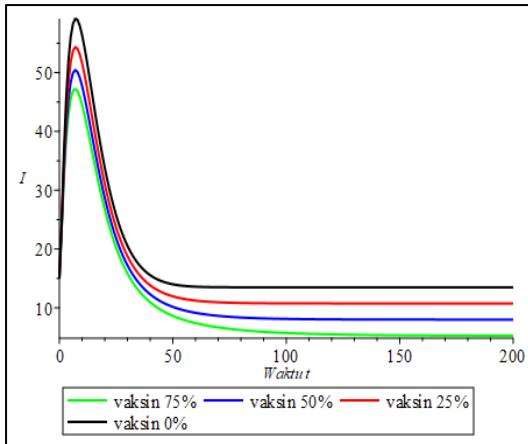
Gambar 6. Simulasi di titik ekuilibrium P_0 , $R_v = 0.505 < 1$, $v = 0.75$ dan $\sigma = 0.25$

Pada Gambar 3 dan Gambar 5, diberikan kontrol dengan laju vaksin yang lebih rendah dibanding pada Gambar 4 dan Gambar 6. Simulasi pada Gambar 3 dan Gambar 5, menunjukkan bahwa jumlah individu dalam populasi terekspose dan terinfeksi selalu ada dalam populasi. Kemudian pada Gambar 3, $R_v \approx 1.5$ artinya rata-rata satu individu yang telah terinfeksi dapat menghasilkan satu koma lima individu baru yang terinfeksi campak, dan pada Gambar 4, $R_v \approx 4$ artinya rata-rata satu individu yang telah terinfeksi dapat menghasilkan empat individu baru yang terinfeksi campak. Nilai $R_v > 1$ menjelaskan bahwa infeksi campak dalam populasi akan meningkat dan bertahan dalam populasi (grafik solusi model konvergen ke titik ekuilibrium endemik P_1). Pada Gambar 3, jika $t \rightarrow \infty$ maka nilai S, E, I dan R berturut-turut konvergen ke $S^1 = 5.29$, $E^1 = 1.67$, $I^1 = 1.34$ dan $R^1 = 155.82$. Jadi dari waktu ke waktu total populasi konvergen ke $N(t) = \frac{b}{\mu} \approx 164$ individu. Hal ini juga berlaku pada Gambar 5.

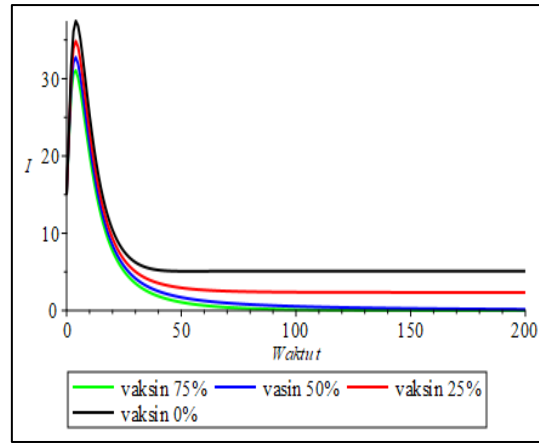
Sedangkan simulasi pada Gambar 4 dan Gambar 6, menunjukkan bahwa, peningkatan laju vaksin pada model menyebabkan jumlah populasi *recovered* akan meningkat, populasi terekspose dan terinfeksi mengalami penurunan dan akhirnya menuju nol. Pada Gambar 4 dan Gambar 6, nilai R_v adalah 0.751 dan 0.505 berturut-turut kurang dari satu, hal ini dapat diartikan bahwa rata-rata satu individu yang telah terinfeksi menghasilkan kurang dari satu individu baru yang terinfeksi. Nilai $R_v <$

1 menjelaskan bahwa infeksi campak dalam populasi akan berkurang dan populasi akan terbebas dari penyakit campak (grafik solusi model konvergen ke titik ekuilibrium bebas penyakit P_0). Pada Gambar 4, jika $t \rightarrow \infty$ maka nilai S, E, I dan R berturut-turut konvergen ke $S^0 = 3.98, E^0 = 0, I^0 = 0$ dan $R^0 = 160.13$. Jadi dari waktu ke waktu total populasi konvergen ke $N(t) = \frac{b}{\mu} \approx 164$ individu. Hal ini juga berlaku pada Gambar 6.

Berikut diberikan Gambar 7, simulasi model tanpa adanya tindakan *support* pada populasi terekspose dan diberikan laju vaksinasi yang bervariasi. Kemudian pada Gambar 8, simulasi model dengan adanya kontrol tindakan *support* sebesar 25% dan diberikan laju vaksinasi yang bervariasi.



Gambar 7. Simulasi model untuk $\sigma = 0$



Gambar 8. Simulasi model untuk $\sigma = 0.25$

Berdasarkan Gambar 7 dapat dijelaskan bahwa, jika tidak diberikan tindakan *support* pada populasi terekspose dan semakin tinggi vaksin yang diberikan pada populasi rentan, berakibat dapat menekan jumlah individu yang terinfeksi dari waktu ke waktu. Sedangkan dari Gambar 8 terlihat bahwa, jika 25% dari populasi terekspose diberikan tindakan *support* dan semakin tinggi tingkat vaksin yang diberikan pada populasi rentan, maka terjadi penurunan jumlah populasi terinfeksi yang lebih besar dibandingkan pada saat tidak diberikan tindakan *support* pada Gambar 7.

SIMPULAN

Model matematika penyebaran penyakit campak yang dikemukakan merupakan model epidemik SEIR dengan adanya kontrol vaksin pada populasi rentan dan tindakan *support* pada populasi terespose. Dari model tersebut, diperoleh dua titik ekuilibrium terdiri dari titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik dengan syarat bilangan reproduksi dasar kurang dari satu dan titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik jika bilangan reproduksi dasar lebih dari satu. Jika tindakan *support* pada populasi terekspose tidak diberikan dan besar persentasi vaksin yang diberikan pada populasi rentan semakin besar maka dapat menyebabkan semakin berkurangnya jumlah populasi terinfeksi. Jadi, jika semakin tinggi laju kontrol (vaksin dan *support*) yang diberikan maka jumlah populasi terekspose dan terinfeksi akan semakin berkurang sehingga populasi dapat terbebas dari penyakit campak dari waktu ke waktu.

REFERENSI

- Ahaya, S. O. S. P., Rahmi, E., & Nurwan, N. (2020). Analisis dinamik model SVEIR pada penyebaran penyakit campak. *Jambura Journal of Biomathematics (JJBM)*, 1(2), 57–64. <https://doi.org/10.34312/jjbm.v1i2.8482>
- Anton, H., Rorres, C., & Kaul, A. (2019). *Elementary Linear Algebra Applications Version* (12th ed.). Wiley.
- Bakare, E. A., Adekunle, Y. A., & Kadiri, K. . (2012). Modelling and simulation of the dynamics of the transmission of measles. *International Journal of Computer Trends and Technology*, 3(1), 174–178.
- Driessche, P. Van Den, & Watmough, J. (2008). Further notes on the basic reproduction number. *Lecture Notes in Mathematics*, 1945, 159–178. https://doi.org/10.1007/978-3-540-78911-6_6
- Edward, S. (2015). A Mathematical Model for Control and Elimination of the Transmission Dynamics of Measles. *Applied and Computational Mathematics*, 4(6), 396. <https://doi.org/10.11648/j.acm.20150406.12>
- Guerra, F. M., Bolotin, S., Lim, G., Heffernan, J., Deeks, S. L., Li, Y., & Crowcroft, N. S. (2017). The basic reproduction number (R0) of measles: a systematic review. *The Lancet Infectious Diseases*, 17(12), e420–e428. [https://doi.org/10.1016/S1473-3099\(17\)30307-9](https://doi.org/10.1016/S1473-3099(17)30307-9)
- Haryanugroho, S. O. (2019). *Perilaku orang tua terhadap penanganan penyakit campak pada anak-anak*. <https://doi.org/https://doi.org/10.31227/osf.io/qfe3s>
- Jamil, A. K., Yulida, Y., & Karim, M. A. (2023). Analisis Kestabilan dan Solusi Numerik pada Model SEIR untuk Penyakit Tuberkulosis. *Epsilon: Jurnal Matematika Murni Dan Terapan*, 17(1), 14–29.
- Karim, M. A., & Yulida, Y. (2021). Analisis Kestabilan dan Sensitivitas pada Model Matematika SEIRD dari Penyebaran Covid-19: Studi Kasus di Kalimantan Selatan. *Media Bina Ilmiah*, 16(5), 7003–7012.
- Kemendes RI. (2018). *Situasi Campak dan Rubella di Indonesia*. [chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://d3v.kemkes.go.id/storage/download/pusdatin/infodatin/imunisasi campak 2018.pdf](chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://d3v.kemkes.go.id/storage/download/pusdatin/infodatin/imunisasi%20campak%202018.pdf)
- Khadijah, M., Yulida, Y., & Susanti, D. S. (2021). Model Mangsa-Pemangsa dengan Fungsi Respon Holling dan Pemanenan. *Epsilon: Jurnal Matematika Murni Dan Terapan*, 15(2), 93–104.
- Kholisoh, S., Waluya, S. B., & Kharis, M. (2012). Model epidemi SEIR pada penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi. *Unnes Journal of Mathematics*, 1(2), 110–117.
- Lestari, S. M., Yulida, Y., Lestia, A. S., & Karim, M. A. (2021). Stability analysis of a smoking behavior model. *Journal of Physics: Conference Series*, 2106(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2106/1/012025>
- Martcheva, M. (2015). *An Introduction to Mathematical Epidemiology*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4899-7612-3>
- Momoh, A. A., Ibrahim, M. O., Uwanta, I. J., & Manga, S. B. (2013). Mathematical Model for Control of Measles Epidemiology. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 87(5), 707–718.

- Mulyono. (2016). Kajian Sejumlah Metode untuk Mencari Solusi Numerik Persamaan Diferensial. *Konferensi Nasional Penelitian Matematika Dan Pembelajarannya*.
- Sowole, S. O., Ibrahim, A., Sangare, D., & Lukman, A. O. (2020). Mathematical model for measles disease with control on the susceptible and exposed compartments. *Open Journal of Mathematical Analysis*, 4(1), 60–75. <https://doi.org/10.30538/psrp-oma2020.0053>
- Sowole, S. O., Sangare, D., & Ibrahim, A. A. (2019). On the existence, uniqueness, stability of solution and numerical simulations of a mathematical model for measles disease. *Adv-Math.Com*, 2019(4), 84–111. <http://adv-math.com/wp-content/uploads/2019/07/adv-manuscript.pdf.pdf>
- Taylor, M. R., & Bhathawala, P. H. (2012). Linearization of Nonlinear Differential Equation by Taylor's Series Expansion and Use of Jacobian Linearization Process. *International Journal of Theoretical and Applied Science*, 4(1), 36–38.
- Trottier, H., & Philippe, P. (2012). Deterministic Modeling Of Infectious Diseases: Applications To Measles And Other Similar Infections. *The Internet Journal of Infectious Diseases*, 2(1), 1–10. <https://doi.org/10.5580/89b>
- Zill, D. G., & Cullen, M. R. (2009). *Differential Equations with Boundary-Value Problems* (Seventh, Issue C). Brooks/Cole Publishing Company, USA