JIPM: Jurnal Ilmu dan Pendidikan Matematika
Vol. 2 No. 2 Oktober (2024)
e-ISSN: 2988-7763
DOI: https://doi.org/10.33830/hexagon.v2i2

Bilangan Terhubung Titik Pelangi pada Graf Garis, Graf Tengah, dan Graf Total dari Graf Panci

Anryan Jusuf [1], Nurwan [2], Nisky Imansyah Yahya [3*], Lailany Yahya [4], Salmun K. Nasib [5], Asriadi [6]
[1,2,3,4,5,6] Jurusan Matematika, Universitas Negeri Gorontalo, Bone Bolango, Indonesia
* Corresponding Author. E-mail: *nisky@ung.ac.id

A R T I C L E   I N F O

Article history:
Received: August 31st, 2024
Revised: September 10th, 2024
Accepted: October 21th, 2024
Available: online October 31th, 2024

Kata Kunci:
Bilangan Terhubung Titik Pelangi; Graf Garis; Graf Tengah; Graf Total; Graf Panci

Keywords:
Rainbow Vertex Connection Number; Line Graph; Middle Graph; Total Graph; Pan Graph

A B S T R A K

Salah satu konsep dalam bidang teori graf yang berkaitan erat dengan pewarnaan titik pelangi adalah bilangan terhubung titik pelangi. Sebuah graf G dikatakan terhubung titik pelangi jika terdapat setidaknya satu jalur yang menghubungkan titik-titik dengan warna yang berbeda. Konsep ini mengacu pada jumlah minimum warna yang dibutuhkan untuk mewarnai sebuah graf G sehingga graf tersebut terhubung dengan titik pelangi dan dilambangkan dengan $rvc(G)$. Topik pewarnaan titik pelangi dapat dieksplorasi dalam berbagai bentuk pengembangan graf dengan memanfaatkan graf garis, graf tengah dan graf total. Graf garis $L(G)$ adalah graf yang titik-titiknya merupakan sisi-sisi dari G, dan jika $u, v \geq E(G)$ maka $uv \geq E\big(L(G)\big)$ sedemikian sehingga u dan v saling berbagi titik di G. Graf tengah $M(G)$, merupakan sebuah graf dengan himpunan titiknya merupakan gabungan antara kumpulan titik dan kumpulan sisi dari graf G. Sedangkan graf total $T(G)$, yaitu graf yang titiknya didapatkan dari himpunan titik dan himpunan sisi dari graf G, dimana setiap titik $V(G)$ saling terhubung. Penelitian ini menganalisis bilangan terhubung titik pelangi yang terhubung pada graf garis, graf tengah dan graf total dari graf panci (Pn_m) dengan $m \geq 6$. Berdasarkan hasil yang diperoleh, didapatkan teorema bilangan terhubung titik pelangi pada graf garis dari graf panci $rvc(G) = \left(\frac{m-2}{2}\right)\left(\frac{(-1)^m+1}{2}\right) + \left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\frac{(-1)^{m+1}+1}{2}\right)$, graf tengah dari graf panci $rvc(G) = \left(\frac{m+2}{2}\right)\left(\frac{(-1)^m+1}{2}\right) + \left(\frac{m+3}{2}\right)\left(\frac{(-1)^{m+1}+1}{2}\right)$, dan graf total dari graf panci $rvc(G) = \left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{(-1)^m+1}{2}\right) + \left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\frac{(-1)^{m+1}+1}{2}\right)$.

A B S T R A C T

One of the concepts in graph theory closely related to rainbow vertex coloring is the rainbow vertex-connected number. A graph G is said to be rainbow vertex-connected if there is at least one path connecting vertices with different colors. This concept refers to the minimum number of colors required to color a graph G so that the graph is rainbow vertex-connected, denoted by $rvc(G)$. The topic of rainbow vertex coloring can be explored in various forms of graph development by utilizing line graphs, middle graphs, and total graphs. A line graph $L(G)$ is a graph where the vertices represent the edges of G, and if $u, v \geq E(G)$, then $uv \geq E\big(L(G)\big)$ such that u and v share a vertex in G. A middle graph $M(G)$ is a graph whose vertex set is the union of the vertex set and edge set of graphs G. Meanwhile, a total graph $T(G)$ is a graph whose vertices are obtained from the vertex set and edge set of graphs G, where every vertex in $V(G)$ is connected to each other. In this research, I discuss the rainbow vertex-connected number of the line graph, middle graph, and total graph of the pan graph (Pn_m) with $m \geq 6$. Based on the obtained results, the theorems for the rainbow vertex connected number of the line graph of the pan graph are $rvc(G) = \left(\frac{m-2}{2}\right)\left(\frac{(-1)^m+1}{2}\right) + \left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\frac{(-1)^{m+1}+1}{2}\right)$, the middle graph of the pan graph $rvc(G) = \left(\frac{m+2}{2}\right)\left(\frac{(-1)^m+1}{2}\right) + \left(\frac{m+3}{2}\right)\left(\frac{(-1)^{m+1}+1}{2}\right)$, and the total graph of the pan graph $rvc(G) = \left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{(-1)^m+1}{2}\right) + \left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\frac{(-1)^{m+1}+1}{2}\right)$.

Jusuf, A., Nurwan, Yahya, N.I., Yahya, L., Nasib, S.K., & Asriadi. (2024). Bilangan Terhubung Titik Pelangi pada Graf Garis, Graf Tengah, dan Graf Total dari Graf Panci. *HEXAGON: Jurnal Ilmu dan Pendidikan Matematika, 2*(2), 157-167. https://doi.org/10.33830/hexagon.v2i2.10000.

PENDAHULUAN

Teori graf adalah bagian dari beberapa contoh cabang ilmu yang umumnya digunakan sebagai media untuk dapat mengilustrasikan satu masalah sehingga lebih mudah dipahami (Lihawa et al., 2022). Perkembangan dalam teori graf juga memiliki peran penting dalam pembentukan model-model terstruktur. Pendekatan ini awalnya diperkenalkan oleh matematikawan asal Swiss bernama Leonhard Euler dalam presentasinya yang berhasil memecahkan permasalahan Jembatan Königsberg pada tanggal 26 Agustus 1735 di Akademi Ilmu Pengetahuan St. Petersburg (Kusuma, Yoga Jati and Prasetyo, 2020).

Teori graf memuat beberapa pokok bahasan yang menarik untuk dikaji diantaranya yaitu pelabelan serta pewarnaan graf. Pelabelan graf yaitu proses pemetaan elemen-elemen dalam graf ke dalam himpunan yang asli. Dalam pelabelan graf terdapat tiga jenis pelabelan yang terdiri dari pelabelan titik, pelabelan sisi serta pelabelan total (Kusuma, Yoga Jati and Prasetyo, 2020). Apabila pelabelannya terkait dengan titik, maka hal tersebut dikatakan sebagai pelabelan titik, selanjutnya jika berkaitan dengan sisi, maka hal tersebut dikatakan pelabelan sisi, serta jika melibatkan pelabelan titik serta sisi, maka hal tersebut dikatakan sebagai pelabelan titik dan sisi yang bisa juga disebut dengan pelabelan total (Taha, Dennynatalis and Nurwan, Nurwan and Nasib, Salmun K and Yahya, 2021).

Topik menarik yang berkembang selain pelabelan graf yaitu pewarnaan graf. Pewarnaan graf adalah proses pemberian warna pada elemen-elemen dalam suatu graf. Pewarnaan graf memiliki peran penting dalam upaya menetapkan minimum jumlah warna yang dibutuhkan untuk untuk memberi warna pada sebuah graf. Pewarnaan graf mencakup tiga jenis utama, yaitu pewarnaan titik (vertex coloring), pewarnaan sisi (edge coloring), dan pewarnaan wilayah (Harsya, HY and Agustin, IH and Dafik, 2014).(Chartrand et al., 2008) mengembangkan konsep pewarnaan menjadi pewarnaan pelangi. Graf dapat dikatakan terhubung pelangi jika ada lintasan pelangi diantara kedua titik dimana tidak ada dua sisi dalam lintasan itu yang mempunyai kesamaan warna. Hubungan antara pewarnaan pelangi dan konsep keterkaitan graf, jadi dasar terbentuknya bilangan terhubung pelangi.

(Krivelevich & Yuster, 2010) mengembangkan konsep bilangan terhubung pelangi ke dalam konsep yang disebut dengan bilangan terhubung titik pelangi. Bilangan terhubung titik pelangi merupakan proses pewarnaan terhadap titik graf G. Setiap titik dalam graf G dapat di hubungkan oleh adanya lintasan pada titik-titik interior dengan warna yang tidak sama. Bilangan terhubung titik pelangi direpresentasikan sebagai $rvc(G)$ (Simamora & Salman, 2015).

Seiring dengan berjalannya waktu, dalam pengembangan bidang teori graf banyak topik yang dapat dikaji salah satunya yaitu dengan memanfaatkan graf garis, graf tengah dan graf total. Graf garis $L(G)$, merupakan sebuah graf yang titiknya adalah sisi-sisi dari G, dan jika $u, v \in E(G)$ maka $uv \in E(L(G))$ sehingga u dan v berbagi titik di G. Graf tengah $M(G)$, merupakan sebuah graf dengan himpunan titiknya merupakan gabungan antara kumpulan titik dan kumpulan sisi dari graf G. Sedangkan graf total $T(G)$ yaitu sebuah graf yang titiknya didapatkan dari kumpulan titik dan kumpulan sisi di graf G, dimana tiap titik $V(G)$ saling terhubung (Srinivasa Rao, K and Murali, 2015). Penelitian-penelitian terkait graf garis $L(G)$, graf tengah $M(G)$ dan graf total $T(G)$ pada bidang kajian pewarnaan titik pelangi sebelumnya telah diteliti oleh beberapa peneliti seperti penelitian oleh (Hariramkumar & Parvathi, 2016), (Fransiskus Fran, Brella Glysentia Vilgalita, 2020), (Sari, 2017), (Liu et al., 2014) dan (Rahmawati et al., 2020).

Kajian penelitian mengenai graf yang digunakan telah dilakukan sebelumnya oleh (Yahya et al., 2023) dan (Verma & James, 2019). Penelitian tersebut membahas tentang penentuan indeks kromatik, pewarnaan total dan diameter dari graf panci, sedangkan graf panci (Pn) adalah gabungan dari graf siklus (Cn) dan graf tunggal (K_1) dengan sebuah lintasan. Dalam penelitian ini, penulis tertarik untuk mengkaji konsep bilangan terhubung titik pelangi dalam menentukan graf garis, graf tengah dan graf total pada graf panci (Pn_m).

METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah (library research) yaitu dengan melibatkan pemeriksaan sumber-sumber seperti jurnal, buku, artikel ilmiah dan referensi terkait lainnya yang berkaitan dengan bilangan terhubung titik pelangi. Hal ini dilakukan dengan maksud untuk memperoleh informasi dengan menentukan metode yang akan digunakan dalam mengulas masalah terkait dalam penelitian ini. Berikut tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini: 1) menggambar serta menentukan graf garis $L(G)$, graf tengah $M(G)$ dan graf total $T(G)$ dari graf panci (Pn_m); 2) setelah mendapatkan gambar graf sebelumnya dengan menentukan graf garis $L(G)$, graf tengah $M(G)$ dan graf total $T(G)$ kemudian menentukan dan memperoleh pola bilangan terhubung titik pelangi (rvc); 3) melakukan pelabelan dan pewarnaan pada graf kemudian mendefinisikan pola bilangan sisi dan titik; 4) melakukan pembuktian teorema bilangan terhubung titik pelangi $rvc(G)$ pada graf tersebut.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bilangan Terhubung Titik Pelangi pada Graf Garis $L(G)$ dari Graf Panci (Pn_m)

Definisi 1: Misalkan m bilangan bulat dengan $m \geq 6$. $L(Pn_m)$ merupakan graf hasil pembentukan graf tengah dari graf panci, sehingga himpunan titik dan sisi dari graf G didefinisikan berturut-turut sebagai berikut:

- $V(G) = \{v_i | i \in [1, m+1]\}$
- $E(G) = \{v_i v_{i+1} | i \in [1, m]\} \cup \{v_1 v_m\} \cup \{v_1 v_{m+1}\}$ (1)

Teorema 1: Misalkan m merupakan bilangan bulat dengan $m \geq 6$ dan $L(Pn_m)$, maka

$$rvc(G) = \left(\frac{m-2}{2}\right)\left(\frac{(-1)^m+1}{2}\right) + \left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\frac{(-1)^{m+1}+1}{2}\right) \tag{2}$$

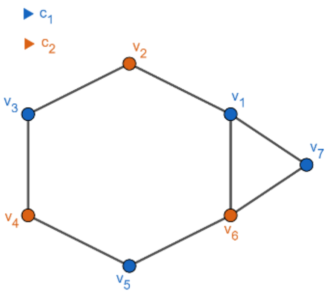
Bukti. Berdasarkan teorema Krivelevich dan Yuster (2010) diketahui bahwa $rvc(G) \geq diam - 1$. Apabila $rvc(G) = diam(G) - 1$ cukup ditunjukkan terdapat lintasan pelangi dengan pewarnaan $c : V(G) \to \{1, 2, \ldots, rvc(G)\}$. Sedangkan jika $rvc(G) \neq diam(G) - 1$ atau $rvc(G) \geq diam(G) - 1$ perlu dibuktikan dengan kontradiksi. Oleh karena itu, pembuktian pada teorema 1 ini dibagi menjadi dua kasus pembuktian, karena pada m genap $rvc(G) = diam(G) - 1$ bisa dibuktikan langsung dengan menunjukkan lintasan dengan pewarnaan $c : V(G) \to \{1, 2, \ldots, diam(G) - 1\}$. Sedangkan untuk kasus m ganjil $rvc(G) \geq diam(G) - 1$, maka dibuktikan dengan kontradiksi.

Kasus 1. m genap, $diam = \frac{m}{2}$
Graf $L(Pn_m)$ merupakan graf garis dari graf panci (Pn_m). Berdasarkan graf pada Gambar 1 terdapat suatu lintasan v_i ke v_j yang selalu melewati setengah dari jumlah titik pada graf lingkaran, sehingga untuk membuat graf tersebut terhubung titik pelangi dengan warna paling minimal maka semua titik ke v_i dari graf lingkaran haruslah diberi warna berbeda sebanyak $\frac{m-2}{2}$. Untuk kasus m genap, karena $rvc(G) = diam(G) - 1$ bisa dibuktikan langsung dengan menunjukkan lintasan dengan pewarnaan $c : V(G) \to \{1, 2, \ldots, diam(G) - 1\}$ pada graf $L(Pn_m)$ untuk m genap dengan $m \geq 6$ yang dikontruksi sebagai berikut:

$$c(v_i) = \begin{cases} i, & \text{untuk } 1 \leq i \leq \frac{m}{2} - 1 \\ i - \left(\frac{m}{2} - 1\right), & \text{untuk } \frac{m}{2} - 1 < i \leq m - 2 \\ i - \left(\frac{m}{2} + 1\right), & \text{untuk } m - 2 < i \leq m \end{cases}$$

$$c(v_{m+1}) = 1 \tag{3}$$

Ilustrasi Pewarnaan titik pelangi pada graf $L(Pn_m)$ dengan $m \geq 6$ untuk m genap dapat dilihat pada Gambar 1 berikut.



Gambar 1. Pewarnaan Titik Pelangi $L(Pn_6)$

Berdasarkan pewarnaan tersebut dapat ditunjukkan bahwa untuk setiap dua titik x dan y di titik v_i dengan $i = [1, m + 1]$ dimana $x, y \in V(G)$ terdapat lintasan pelangi dengan pewarnaan c yang dapat dilihat pada Tabel 1 berikut:

Table 1. Lintasan Titik Pelangi Graf $L(Pn_m)$ untuk m genap

No	x	y	Kondisi	Lintasan Pelangi
1.	v_i	v_j	$i = [1, m], j = \left(i + \frac{m}{2}\right) \bmod m$ $i \neq \frac{m}{2}$, untuk $i = \frac{m}{2}, j = m$	$v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_j$
			$i = m + 1, j = \frac{m}{2}$	$v_i, v_1, v_2, \dots, v_j$
			$i = m + 1, j = \frac{m}{2}$	$v_i, v_{i-1}, v_{i-2}, \dots, v_j$

Berdasarkan **Definisi 1** tentang bilangan terhubung titik pelangi dan lintasan pelangi pada Tabel 1 maka Teorema 1 yang menyatakan $rvc(G) = \frac{m-2}{2}$ untuk m genap dengan $m \geq 6$ terbukti.

Kasus 2. $\text{M ganjil, diam} = \frac{m+1}{2}$

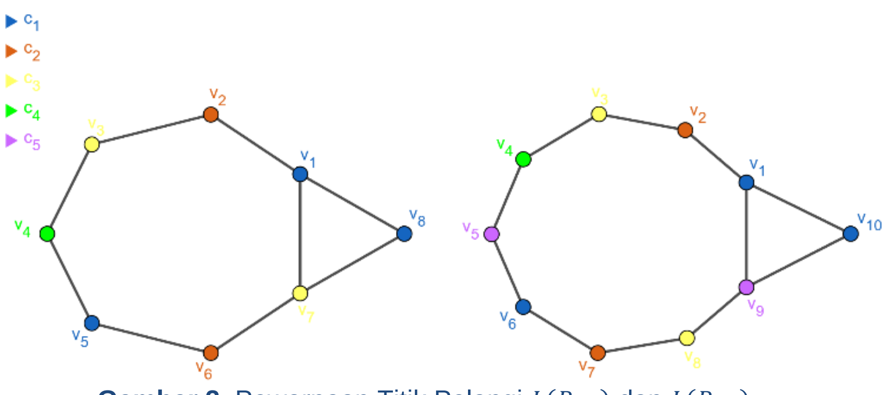
Selanjutnya untuk kasus m ganjil akan ditunjukkan dengan kontradiksi bahwa $rvc \neq \frac{m+1}{2} - 1$. Andaikan $rvc = \frac{m+1}{2} - 1$, maka terdapat c yang merupakan suatu pewarnaan titik pelangi $c : V(G) \to \left\{1,2, \dots, \frac{m+1}{2} - 1\right\}$.

Perhatikan jika v_{i+1} diberi warna $1,2,3, \dots, \frac{m+1}{2} - 1$ maka akan terdapat satu titik $v_i = v_{i+1}$ yang menyebabkan lintasan $v_{m+1} - v_j$ tidak pelangi. Karena graf $L(Pn_m)$ tidak dapat diwarnai dengan $\frac{m+1}{2} - 1$ warna maka pengandaian salah, haruslah graf G diwarnai dengan $\frac{m+1}{2}$ warna sehingga $rvc(G) = \frac{m+1}{2}$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $rvc(G) = \frac{m+1}{2}$ dengan kontruksi pewarnaan titik c sebagai berikut:

$$c(v_i) = \begin{cases} i, & \text{untuk } 1 \leq i \leq \dfrac{m+1}{2} \\ i - \left(\dfrac{m+1}{2}\right), & \text{untuk } \dfrac{m+1}{2} < i \leq m \end{cases}$$

$$c(v_{m+1}) = 1 \tag{4}$$

Ilustrasi pewarnaan titik pelangi pada graf $L(Pn_m)$ dengan $m \geq 6$ untuk m ganjil dapat dilihat pada Gambar 2 berikut



Gambar 2. Pewarnaan Titik Pelangi $L(Pn_7)$ dan $L(Pn_9)$

Untuk setiap dua titik x dan y di titik v_i dengan $i \in [1, m + 1]$ dimana $x, y \in V\big(L(Pn_m)\big)$ terdapat lintasan pelangi dengan pewarnaan c pada titik-titiknya dengan kondisi yang ditunjukkan pada Tabel 2.

Table 2. Lintasan Titik Pelangi Graf $L(Pn_m)$ untuk m ganjil

No	x	y	Kondisi	Lintasan Pelangi
1.	v_i	v_j	$i = [1, m], j = \left(i + \frac{m+1}{2}\right) \bmod m$ $i \neq \frac{m-1}{2}$, untuk $i = \frac{m-1}{2}, j = m$	$v_i, v_m, v_{m-1}, \dots, v_j$
			$i = m+1, j = \frac{m}{2}$	$v_i, v_1, v_2, \dots, v_j$
			$i = m+1, j = \frac{m}{2}$	$v_i, v_{i-1}, v_{i-2}, \dots, v_j$

Berdasarkan **Definisi 1** tentang bilangan terhubung titik pelangi dan lintasan pelangi pada Tabel 2 maka **Teorema 1** yang menyatakan $\mathrm{rvc}(L(Pn_m)) = \frac{m+1}{2}$ untuk m ganjil dengan $m \geq 6$ terbukti.

Bilangan Terhubung Titik Pelangi pada Graf Tengah $M(G)$ dari Graf Panci (Pn_m)

Definisi 2: Misalkan m bilangan bulat dengan $m \geq 6$. $M(Pn_m)$ merupakan graf hasil pembentukan graf tengah dari graf panci, sehingga himpunan titik dan sisi dari graf G didefinisikan berturut-turut sebagai berikut:

- $V(G) = \{u_i | i \in [1, m+1]\} \cup \{v_i | i \in [1, m+1]\}$
- $E(G) = \{u_i v_{i+1} | i \in [1, m]\} \cup \{v_i u_i | i \in [1, m+1]\} \cup \{v_i v_{i+1} | i \in [1, m]\} \cup \{v_1 v_m\} \cup \{v_i v_{m+1}\} \cup \{v_1 u_m\}$

Teorema 2: Misalkan m merupakan bilangan bulat dengan $m \geq 6$ dan $M(Pn_m)$, maka

$$\mathrm{rvc}(G) = \left(\frac{m+2}{2}\right)\left(\frac{(-1)^m + 1}{2}\right) + \left(\frac{m+3}{2}\right)\left(\frac{(-1)^{m+1} + 1}{2}\right) \quad (5)$$

Kasus 1. m genap, diam $= \frac{m}{2} + 2$

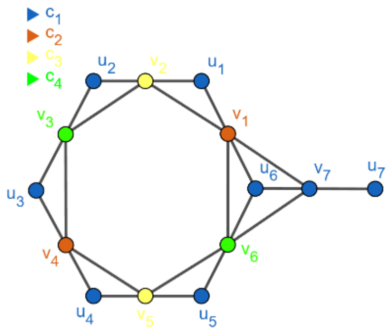
Graf $M(Pn_m)$ merupakan graf tengah dari graf panci (Pn_m). Berdasarkan graf pada Gambar 4 terdapat suatu lintasan u_i ke u_j yang selalu melewati setengah dari jumlah titik pada graf lingkaran, sehingga untuk membuat graf tersebut terhubung titik pelangi dengan warna paling minimal maka semua titik ke u_i dari graf lingkaran haruslah diberi warna berbeda sebanyak $\frac{m+2}{2}$. Untuk kasus m genap, karena $\mathrm{rvc}(G) = \mathrm{diam}(G) - 1$ bisa dibuktikan langsung dengan menunjukkan lintasan dengan pewarnaan $c: V(G) \to \{1, 2, \dots, \mathrm{diam}(G) - 1\}$ pada graf $M(Pn_m)$ untuk m genap dengan $m \geq 6$ yang dikontruksi sebagai berikut:

$$c(v_i) = \begin{cases} i+1, & \text{untuk } 1 \leq i \leq \frac{m}{2} \\ i - \left(\frac{m}{2} - 1\right), & \text{untuk } \frac{m}{2} < i \leq m \end{cases}$$

$$c(u_i) = 1; \quad i \in [1, m+1]$$

$$c(v_{m+1}) = 1 \quad (6)$$

Ilustrasi Pewarnaan titik pelangi pada graf $L(Pn_m)$ dengan $m \geq 6$ untuk m genap dapat dilihat pada Gambar 3 berikut



Gambar 3. Pewarnaan Titik Pelangi $M(Pn_6)$

Berdasarkan pewarnaan tersebut dapat ditunjukkan bahwa untuk setiap dua titik x dan y di titik v_i dengan $i = [1, m + 1]$ dimana $x, y \in V(G)$ terdapat lintasan pelangi dengan pewarnaan c yang dapat dilihat pada Tabel 3.

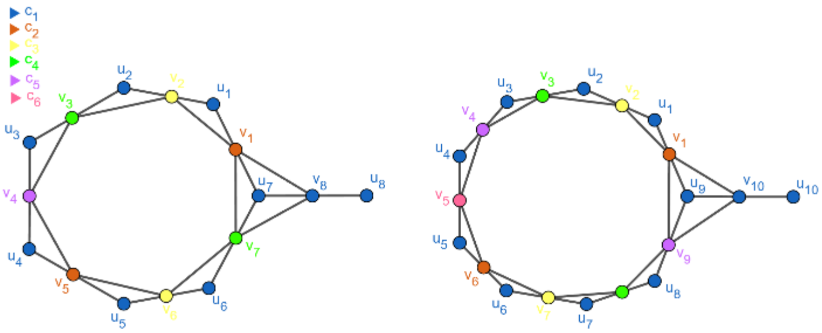
Table 3. Lintasan Titik Pelangi Graf $M(Pn_m)$ untuk m genap

No	x	Y	Kondisi	Lintasan Pelangi
1.	v_i	v_j	$i = [1, m], j = \left(i + \frac{m}{2}\right) \bmod m$ $i \neq \frac{m}{2}$, untuk $i = \frac{m}{2}, j = m$	$v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_j$
2.	v_i	u_j	$i = [1, m], j = \left(i + \frac{m}{2}\right) \bmod m$ $i \neq \frac{m}{2}$, untuk $i = \frac{m}{2}, j = m$	$v_i, v_m, v_{m-1}, \dots, u_j$
3.	u_i	v_j	$i = [1, m], j = \left(i + \left(\frac{m}{2} + 1\right)\right) \bmod m$ $i \neq \frac{m}{2} - 1$, untuk $i = \frac{m}{2} - 1, j = m$	$u_i, v_i, v_m, v_{m-1}, \dots, v_j$
4.	u_i	u_j	$i = [1, m], j = \left(i + \frac{m}{2}\right) \bmod m$ $i \neq \frac{m}{2}$, untuk $i = \frac{m}{2}, j = m$	$u_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, u_j$
			$i = [m + 1], j = \frac{m}{2}$	$u_i, v_i, v_1, \dots, u_j$
			$i = [m + 1], j = \frac{m}{2}$	$u_i, v_i, v_{i-1}, \dots, u_j$

Berdasarkan definisi bilangan terhubung titik pelangi dan lintasan titik pelangi pada Tabel 3 maka Teorema 2 yang menyatakan $rvc(G) = \frac{m+2}{2}$ untuk m genap dengan $m \geq 6$ terbukti.

Kasus 2. m ganjil, diam $= \frac{m+3}{2}$

Selanjutnya untuk kasus m ganjil akan ditunjukkan dengan kontradiksi bahwa $rvc \neq \frac{m+3}{2} - 1$. Andaikan $rvc = \frac{m+3}{2} - 1$, maka terdapat c yang merupakan suatu pewarnaan titik pelangi $c : V(G) \to \left\{1,2, \dots, \frac{m+3}{2} - 1\right\}$, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4 berikut:

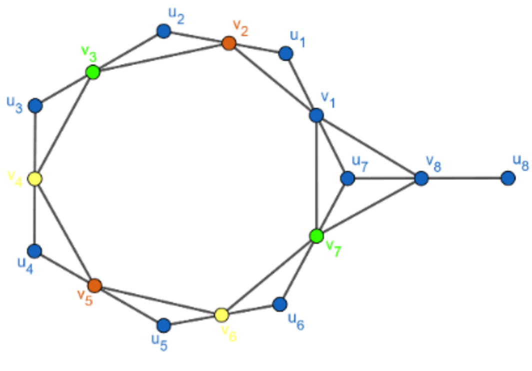


Gambar 4. Pewarnaan Titik Pelangi $M(Pn_m)$ dengan 4 warna

Perhatikan jika v_1 diberi warna $1,2,3,\dots,\frac{m+3}{2}-1$ maka akan terdapat satu titik $v_{m+1}=v_1$ yang menyebabkan lintasan $u_{m+1}-u_j$ tidak pelangi. Karena graf $M(Pn_m)$ tidak dapat diwarnai dengan $\frac{m+3}{2}-1$ warna maka pengandaian salah, haruslah graf G diwarnai dengan $\frac{m+3}{2}$ warna sehingga $rvc(G)=\frac{m+3}{2}$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $rvc(G)=\frac{m+3}{2}$ dengan kontruksi pewarnaan titik c sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
c(v_i) &= \begin{cases} i+1, & \text{untuk } 1 \le i \le \dfrac{m+1}{2} \\ i-\left(\dfrac{m-1}{2}\right), & \text{untuk } \dfrac{m+1}{2} < i \le m \end{cases} \\
c(u_i) &= 1; \quad i \in [1, m+1] \\
c(v_{m+1}) &= 1
\end{aligned} \tag{7}
$$

Ilustrasi pewarnaan titik pelangi pada graf $L(Pn_m)$ dengan $m \ge 6$ untuk m ganjil dapat dilihat pada Gambar 5 berikut.



Gambar 5. Pewarnaan Titik Pelangi $M(Pn_7)$, dan $M(Pn_9)$

Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap dua titik x dan y di titik u_i, v_i dengan $i \in [1, m+1]$ dimana $x, y \in V(M(Pn_m))$ terdapat lintasan pelangi dengan pewarnaan c pada titik-titiknya dengan kondisi yang ditunjukkan pada Tabel 4.

Table 4. Lintasan Titik Pelangi Graf $M(Pn_m)$ untuk m ganjil

No	x	Y	Kondisi	Lintasan Pelangi
1.	v_i	v_j	$i=[1,m], j=\left(i+\frac{m+1}{2}\right) \bmod m$	$v_i, v_m, v_{m-1}, \dots, v_j$

			$i \neq \frac{m-1}{2}$, untuk $i = \frac{m-3}{2}, j = m$	
2.	v_i	u_j	$i = [1, m], j = \left(i + \frac{m+1}{2}\right) \bmod m$ $i \neq \frac{m-1}{2}$, untuk $i = \frac{m-1}{2}, j = m$	$v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, u_j$
3.	u_i	v_j	$i = [1, m], j = \left(i + \frac{m+1}{2}\right) \bmod m$ $i \neq \frac{m-1}{2}$, untuk $i = \frac{m-1}{2}, j = m$	$u_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_j$
4.	u_i	u_j	$i = [1, m], j = \left(i + \frac{m+1}{2}\right) \bmod m$ $i \neq \frac{m-1}{2}$, untuk $i = \frac{m-1}{2}, j = m$	$u_i, v_i, v_m, v_{m-1}, \dots, u_j$
			$i = [m+1], j = \frac{m}{2}$	$u_i, v_i, v_1, v_2, \dots, u_j$
			$i = [m+1], j = \frac{m}{2}$	$u_i, v_i, v_{i-1}, v_{i-2}, \dots, u_j$

Berdasarkan definisi bilangan terhubung titik pelangi dan lintasan pelangi pada Tabel 4 maka Teorema 2 yang menyatakan $rvc(M(Pn_m)) = \frac{m+3}{2}$ untuk m ganjil dengan $m \geq 6$ terbukti.

Bilangan Terhubung Titik Pelangi pada Graf Total $T(G)$ dari Graf Panci (Pn_m)

Definisi 3: Misalkan m bilangan bulat dengan $m \geq 6$. $T(Pn_m)$ merupakan graf hasil pembentukan graf total dari graf panci, sehingga himpunan titik dan sisi dari graf G didefinisikan berturut-turut sebagai berikut:

- $V(G) = \{u_i | i \in [1, m+1]\} \cup \{v_i | i \in [1, m+1]\}$
- $E(G) = \{u_i v_{i+1} | i \in [1, m]\} \cup \{v_i u_i | i \in [1, m+1]\} \cup \{v_i v_{i+1} | i \in [1, m]\} \cup \{u_i u_{i+1} | i \in [1, m]\} \cup \{u_1 u_m\} \cup \{v_1 u_m\} \cup \{v_1 v_m\} \cup \{v_1 v_{m+1}\}$

(8)

Teorema 3: Misalkan m merupakan bilangan bulat dengan $m \geq 6$ dan $T(Pn_m)$, maka

$$rvc(G) = \left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{(-1)^m + 1}{2}\right) + \left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\frac{(-1)^{m+1} + 1}{2}\right) \tag{9}$$

Kasus 1. m genap, diam $= \frac{m}{2} + 1$

Graf $T(Pn_m)$ merupakan graf tengah dari graf panci (Pn_m). Berdasarkan graf pada Gambar 7 terdapat suatu lintasan u_i ke u_j yang selalu melewati setengah dari jumlah titik pada graf lingkaran, sehingga untuk membuat graf tersebut terhubung titik pelangi dengan warna paling minimal maka semua titik ke u_i dari graf lingkaran haruslah diberi warna berbeda sebanyak $\frac{m}{2}$. Untuk kasus m genap, karena $rvc(G) = diam(G) - 1$ bisa dibuktikan langsung dengan menunjukkan lintasan dengan pewarnaan $c : V(G) \to \{1, 2, \dots, diam(G) - 1\}$ pada graf $T(Pn_m)$ untuk m genap dengan $m \geq 6$ yang dikontruksi sebagai berikut:

$$c(v_i) = \begin{cases} i + 1, & \text{untuk } 1 \leq i \leq \frac{m}{2} - 1 \\ i - \left(\frac{m}{2} - 1\right), & \text{untuk } \frac{m}{2} - 1 < i \leq m - 1 \end{cases}$$

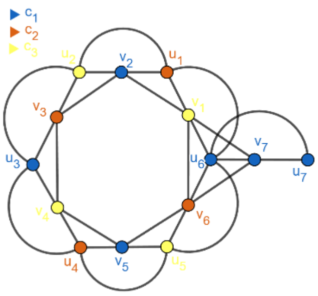
$$c(v_i) = \frac{m}{2}; \quad i = 1$$

$$c(v_i) = \begin{cases} i, & \text{untuk } 1 \leq i \leq \frac{m}{2} \\ i - \left(\frac{m}{2}\right), & \text{untuk } \frac{m}{2} < i \leq m - 1 \end{cases}$$

$$c(u_m) = c(u_{m+1}) = c(v_{m+1}) = 1;$$

(10)

Ilustrasi Pewarnaan titik pelangi pada graf $\mathrm{T}(\mathrm{Pn}_{\mathrm{m}})$ dengan $\mathrm{m} \geq 6$ untuk m genap dapat dilihat pada Gambar 6 berikut



Gambar 6. Pewarnaan Titik Pelangi $T(Pn_6)$

Berdasarkan pewarnaan tersebut dapat ditunjukkan bahwa untuk setiap dua titik x dan y di titik $u_i \mathrm{v_i}$ dengan $\mathrm{i} = [1, \mathrm{m}+1]$ dimana $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{V}(\mathrm{G})$ terdapat lintasan pelangi dengan pewarnaan c yang dapat dilihat pada Tabel 5 berikut:

Table 5. Lintasan Titik Pelangi Graf $T(Pn_m)$ utnuk m genap

No	x	Y	Kondisi	Lintasan Pelangi
1.	v_i	v_j	$i = [1, m], j = \left(i + \frac{m}{2}\right) \bmod m$ $i \neq \frac{m}{2}$, untuk $i = \frac{m}{2}, j = m$	$v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_j$
2.	v_i	u_j	$i = [1, m], j = \left(i + \frac{m}{2}\right) \bmod m$ $i \neq \frac{m}{2}$, untuk $i = \frac{m}{2}, j = m$	$v_i, v_m, v_{m-1}, \dots, u_j$
3.	u_i	v_j	$i = [1, m], j = \left(i + \left(\frac{m}{2} + 1\right)\right) \bmod m$ $i \neq \frac{m}{2} - 1$, untuk $i = \frac{m}{2} - 1, j = m$	$u_i, v_i, v_m, \dots, v_j$
4.	u_i	u_j	$i = [1, m], j = \left(i + \frac{m}{2}\right) \bmod m$ $i \neq \frac{m}{2}$, untuk $i = \frac{m}{2}, j = m$	$u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_j$
			$i = m + 1, j = \frac{m}{2}$	$u_i, u_{i-1}, u_1, \dots, u_j$
			$i = m + 1, j = \frac{m}{2}$	$u_i, u_{i-1}, u_{i-2}, \dots, u_j$

Berdasarkan definisi bilangan terhubung titik pelangi dan lintasan titik pelangi pada Tabel 5 maka Teorema 3 yang menyatakan $\mathrm{rvc}(\mathrm{G}) = \frac{\mathrm{m}}{2}$ untuk m genap dengan $\mathrm{m} \geq 6$ terbukti.

Kasus 2. m ganjil, $\mathrm{diam} = \frac{\mathrm{m}+1}{2}$

Selanjutnya untuk kasus m ganjil akan ditunjukkan dengan kontradiksi bahwa $\mathrm{rvc} \neq \frac{\mathrm{m}+1}{2} - 1$. Andaikan $\mathrm{rvc} = \frac{\mathrm{m}+1}{2} - 1$, maka terdapat c yang merupakan suatu pewarnaan titik pelangi $\mathrm{c} : \mathrm{V}(\mathrm{G}) \to \left\{1, 2, \dots, \frac{\mathrm{m}+3}{2} - 1\right\}$.

Perhatikan jika v_1 diberi warna $1, 2, 3, \dots, \frac{\mathrm{m}+1}{2} - 1$ maka akan terdapat satu titik $\mathrm{u_m} = \mathrm{u_i}$ yang menyebabkan lintasan $\mathrm{u}_{\mathrm{m}+1} - \mathrm{u_j}$ tidak pelangi. Karena graf $\mathrm{T}(\mathrm{Pn}_{\mathrm{m}})$ tidak dapat diwarnai dengan $\frac{\mathrm{m}+1}{2} - 1$ warna maka pengandaian salah, haruslah graf G diwarnai dengan $\frac{\mathrm{m}+1}{2}$ warna sehingga $\mathrm{rvc}(\mathrm{G}) = \frac{\mathrm{m}+1}{2}$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\mathrm{rvc}(\mathrm{G}) = \frac{\mathrm{m}+1}{2}$ dengan kontruksi pewarnaan titik c sebagai berikut:

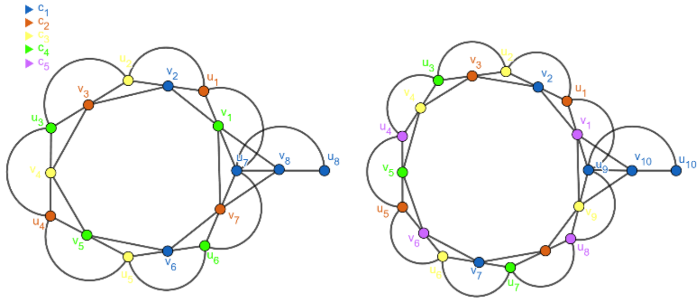
$$c(v_i) = \begin{cases} i+1, & \text{untuk } 1 \leq i \leq \dfrac{m-1}{2} \\ i-\left(\dfrac{m-3}{2}\right), & \text{untuk } \dfrac{m-1}{2} < i \leq m-1 \end{cases}$$

$$c(v_i) = \frac{m+1}{2}; \quad i = 1$$

$$c(v_i) = \begin{cases} i, & \text{untuk } 1 \leq i \leq \dfrac{m+1}{2} \\ i-\left(\dfrac{m+1}{2}\right), & \text{untuk } \dfrac{m+1}{2} < i \leq m-1 \end{cases}$$

$$c(u_m) = c(u_{m+1}) = c(v_{m+1}) = 1; \tag{11}$$

Ilustrasi pewarnaan titik pelangi pada graf $T(Pn_m)$ dengan $m \geq 6$ untuk m ganjil dapat dilihat pada Gambar 7 berikut.



Gambar 7. Pewarnaan Titik Pelangi $T(Pn_7)$ dan $T(Pn_9)$

Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap dua titik x dan y di titik u_i, v_i dengan $i \in [1, m+1]$ dimana $x, y \in V(T(Pn_m))$ terdapat lintasan pelangi dengan pewarnaan c pada titik-titiknya dengan kondisi yang ditunjukkan pada Tabel 6.

Table 6. Lintasan Titik Pelangi Graf $T(Pn_m)$ untuk m ganjil

No	x	y	Kondisi	Lintasan Pelangi
1.	v_i	v_j	$i = [1, m], j = \left(i + \frac{m+1}{2}\right) \bmod m$ $i \neq \frac{m-1}{2}$, untuk $i = \frac{m-1}{2}, j = m$	$v_i, v_m, v_{m-1}, v_{m-2}, \dots, v_j$
2.	v_i	u_j	$i = [1, m], j = \left(i + \frac{m-1}{2}\right) \bmod m$ $i \neq \frac{m-1}{2}$, untuk $i = \frac{m+1}{2}, j = m$	$v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, u_j$
3.	u_i	v_j	$i = [1, m], j = \left(i + \frac{m+1}{2}\right) \bmod m$ $i \neq \frac{m-1}{2}$, untuk $i = \frac{m-1}{2}, j = m$	$u_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_j$
4.	u_i	u_j	$i = [1, m], j = \left(i + \frac{m+1}{2}\right) \bmod m$ $i \neq \frac{m-1}{2}$, untuk $i = \frac{m}{2}, j = m$	$u_i, u_m, u_{m-1}, \dots, u_j$
			$i = m+1, j = \frac{m+1}{2}$	$u_i, u_{i-1}, u_1, \dots, u_j$
			$i = m+1, j = \frac{m+1}{2}$	$u_i, u_{i-1}, u_{i-2}, \dots, u_j$

Berdasarkan **Definisi 3** tentang bilangan terhubung titik pelangi dan lintasan pelangi pada Tabel 6 maka Teorema 3 yang menyatakan $rvc(T(Pn_m)) = \frac{m+1}{2}$ untuk m ganjil dengan $m \geq 6$ terbukti.

SIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, maka diperoleh bilangan terhubung titik pelangi pada graf tengah dari graf panci $\mathrm{L}(\mathrm{Pn_m})$, dengan m merupakan bilangan bulat dengan $\mathrm{m} \geq 6$, maka

$$\mathrm{rvc(G)} = \left(\frac{\mathrm{m}-2}{2}\right)\left(\frac{(-1)^{\mathrm{m}}+1}{2}\right) + \left(\frac{\mathrm{m}+1}{2}\right)\left(\frac{(-1)^{\mathrm{m}+1}+1}{2}\right) \quad (12)$$

Untuk bilangan terhubung titik pelangi pada graf tengah dari graf panci $\mathrm{M}(\mathrm{Pn_m})$, dengan m merupakan bilangan bulat dengan $\mathrm{m} \geq 6$, diperoleh

$$\mathrm{rvc(G)} = \left(\frac{\mathrm{m}+2}{2}\right)\left(\frac{(-1)^{\mathrm{m}}+1}{2}\right) + \left(\frac{\mathrm{m}+3}{2}\right)\left(\frac{(-1)^{\mathrm{m}+1}+1}{2}\right) \quad (13)$$

Sedangkan, bilangan terhubung titik pelangi pada graf tengah dari graf panci $\mathrm{T}(\mathrm{Pn_m})$, dengan m merupakan bilangan bulat dengan $\mathrm{m} \geq 6$, diperoleh

$$\mathrm{rvc(G)} = \left(\frac{\mathrm{m}}{2}\right)\left(\frac{(-1)^{\mathrm{m}}+1}{2}\right) + \left(\frac{\mathrm{m}+1}{2}\right)\left(\frac{(-1)^{\mathrm{m}+1}+1}{2}\right) \quad (14)$$

DAFTAR PUSTAKA

Chartrand, G., Johns, G. L., McKeon, K. A., & Zhang, P. (2008). Rainbow connection in graphs. *Mathematica Bohemica*, *133*(1), 85–98. https://doi.org/10.21136/MB.2008.133947

Fransiskus Fran, Brella Glysentia Vilgalita, Y. (2020). BILANGAN TERHUBUNG TITIK PELANGI PADA GRAF KUADRATIK DAN GRAF GARIS DARI GRAF KEMBANG API. *Bimaster : Buletin Ilmiah Matematika, Statistika Dan Terapannya*, *9*(2). https://doi.org/10.26418/bbimst.v9i2.40221

Hariramkumar, C. S., & Parvathi, N. (2016). Rainbow Vertex Coloring for Line, Middle, Central, Total Graph of Comb Graph. *Indian Journal of Science and Technology*, *9*(S1). https://doi.org/10.17485/ijst/2016/v9iS1/97463

Harsya, HY and Agustin, IH and Dafik, D. (2014). *Pewarnaan Titik pada Operasi Graf Sikel dengan Graf Lintasan*. *1*, 11--18.

Krivelevich, M., & Yuster, R. (2010). The rainbow connection of a graph is (at most) reciprocal to its minimum degree. *Journal of Graph Theory*, *63*(3), 185–191. https://doi.org/10.1002/jgt.20418

Kusuma, Yoga Jati and Prasetyo, D. A. B. (2020). PELABELAN TOTAL TAK-AJAIB SISI PADA MULTISTAR. *EPSILON: JURNAL MATEMATIKA MURNI DAN TERAPAN*, *14*.

Lihawa, I., Ismail, S., Hasan, I. K., Yahya, L., Nasib, S. K., & Yahya, N. I. (2022). Bilangan Terhubung Titik Pelangi pada Graf Hasil Operasi Korona Graf Prisma (P_(m,2)) dan Graf Lintasan (P_3). *Jambura Journal of Mathematics*, *4*(1), 145–151. https://doi.org/10.34312/jjom.v4i1.11826

Liu, H., Mestre, Â., & Sousa, T. (2014). Total rainbow k-connection in graphs. *Discrete Applied Mathematics*, *174*, 92–101. https://doi.org/10.1016/j.dam.2014.04.012

Rahmawati, D., Fran, F., Yudhi, & Krisantoni, D. (2020). Total rainbow connection number of-centipede graph and its line, square, and middle graph. *AIP Conference Proceedings*, *2268*(September). https://doi.org/10.1063/5.0016815

Sari, B. B. (2017). Bilangan Rainbow Connection Graf Garis. *Jurnal Matematika UNAND*, *6*(4), 17–21.

Simamora, D. N. S., & Salman, A. N. M. (2015). The Rainbow (Vertex) Connection Number of Pencil Graphs. *Procedia Computer Science*, *74*, 138–142. https://doi.org/10.1016/j.procs.2015.12.089

Srinivasa Rao, K and Murali, R. (2015). Rainbow connection number of sunlet graph and its line, middle and total graph Int. *J. of Math. and Its Appl*, 105--113.

Taha, Dennynatalis and Nurwan, Nurwan and Nasib, Salmun K and Yahya, N. I. (2021). Bilangan terhubung titik pelangi pada graf bunga (Wm, Kn) dan graf Oleander (Orn). *UNNES Journal of Mathematics*, 8--13.

Verma, S., & James, M. (2019). Chromatic Index, Total Coloring and Diameter of Pan and Tadpole Graphs. *Journal of Computer and Mathematical Sciences*, *10*(6), 1294–1301. https://doi.org/10.29055/jcms/1118

Yahya, N. I., Fatmawati, A., Nurwan, N., & Nasib, S. K. (2023). Rainbow Vertex-Connection Number on Comb Product Operation of Cycle Graph (C_4) and Complete Bipartite Graph (K_(3,N)). *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan*, *17*(2), 0673–0684. https://doi.org/10.30598/barekengvol17iss2pp0673-0684