JIPM: Jurnal Ilmu dan Pendidikan Matematika
Vol.1 No.2 Oktober (2023)
e-ISSN: 2988-7763
DOI: 10.33830/hexagon.v1i2.5266.

Pembuktian Cara Cepat Rumus Jarak dalam Bangun Ruang Ditinjau dari Ruang Lingkup Geometri Matematika Sekolah

Mahfudz Reza Fahlevi [1*]
[1] Institut Agama Islam Negeri Syaikh Abdurrahman Siddik Bangka Belitung, Bangka, Indonesia
* Corresponding Author. E-mail: mahfudzrezafahlevi@iainsasbabel.ac.id

A R T I C L E   I N F O

Article history:
Received : June 28th, 2023
Revised : August 7th, 2023
Accepted : September 19th, 2023
Available : online October 31st, 2023

Kata Kunci:
jarak, pembuktian, rumus cepat

Keywords:
distance, proof, quick formula

A B S T R A K

Tujuan penelitian ini adalah untuk menyajikan ragam pembuktian pada suatu rumus cepat (rumus jarak) dalam materi bangun ruang dimensi tiga. Dalam pembelajaran matematika sekolah, rumus cepat dalam materi bangun ruang dimensi tiga sering digunakan, namun jarang dilengkapi dengan penanaman konsep yang kuat sehingga dapat memberi dampak buruk bagi budaya belajar matematika. Dengan metode penelitian kualitatif melalui kajian kepustakaan, peneliti berupaya untuk berkontribusi memberikan bukti matematis suatu rumus cepat agar dapat menjadi referensi bagi guru. Pembuktian rumus cepat dijelaskan dari beragam sudut pandang menggunakan berbagai materi yang masih dalam ruang lingkup geometri. Adapun materi-materi yang dilibatkan dalam pembuktian penelitian ini meliputi beberapa konsep. Konsep-konsep tersebut meliputi kesebangunan, luas segitiga, bangun ruang dimensi tiga, geometri analitis (dengan sistem koordinat Kartesius), serta dengan pendekatan analisis vektor (vektor ruang). Hasil penelitian menunjukkan bahwa suatu rumus cepat dapat dibuktikan dengan materi-materi dalam matematika sekolah, sehingga bisa menjadi referensi bagi guru ketika ingin menggunakan rumus cepat tersebut yang dilengkapi dengan dasar pembuktian yang kuat. Lebih lanjut, penelitian ini dapat dikembangkan dengan melengkapi pembuktian rumus cepat (rumus jarak) menggunakan konsep lainnya yang masih sesuai dalam materi matematika sekolah.

A B S T R A C T

The purpose of this study is to present a variety of proofs on a short-cut formula (distance formula) in three-dimensional geometric material. In school mathematics learning, short-cut formulas in three-dimensional geometric material are often used, but are rarely equipped with strong conceptual frameworks that can have a negative impact on the culture of learning mathematics. Using qualitative research methods through literature review, researchers seek to contribute to providing mathematical evidence for a quick formula so that it can become a reference for teachers. The proof of the short-cut formula is explained from various points of view using various materials that are still within the scope of geometry. The materials included in the proof of this research include several concepts. These concepts include congruence, area of triangles, three-dimensional geometric shapes, analytical geometry (with the Cartesian coordinate system), and the approach to vector analysis (vector space). The results of the research show that a short-cut formula can be proven with materials in school mathematics, so that it can be a reference for teachers when they want to use the short-cut formula which is equipped with a strong basis of proof. Furthermore, this research can be developed by completing the proof of the short-cut formula (distance formula) using other concepts that are still appropriate in school mathematics material.

PENDAHULUAN

Ilmu yang membantu manusia memahami kontur wilayahnya melalui teknik menggambar peta, ilmu yang menjadi dasar seseorang ketika membuat desain bangunan atau desain lainnya, serta ilmu yang harus dipelajari dalam kingdom animalia agar memudahkan seseorang memahami hewan ketika hewan-hewan tersebut beraktivitas dan melakukan pergerakan merupakan segilintir manfaat dari belajar geometri (Risnawati et al., 2019; Wasilah, 2018). Banyaknya manfaat yang terkandung di dalamnya membuat geometri sangat penting dipahami dan dipelajari (In'am & Islamiati, 2018). Pentingnya mempelajari Geometri juga dinyatakan dalam Prinsip dan Standar Matematika Sekolah yang disusun oleh organisasi pendidikan matematika terbesar dunia, *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) pada tahun 2000 (Yorulmaz & Çilingir Altıner, 2021). Tidak hanya sebagai materi yang penting, perkembangan berpikir seseorang ketika belajar geometri juga dapat dianalisa dan dapat dinyatakan dalam level-level tertentu, adapun teori yang dapat digunakan untuk mengukur hasil analisa level berpikir geometri tersebut dikemukakan oleh dua ahli pendidik berasal dari Belanda, yakni Dina van Hiele-Geldof dan Pierre Marie van Hiele sekitar tahun 1950-an hingga awal 1960-an, yang lebih lanjut dikenal sebagai teori Van Hiele (Walle et al., 2019).

Beberapa alasan utama yang membuat geometri penting untuk dipelajari telah dikemukakan oleh para ahli bahkan sejak lama. Alasan tersebut dirangkum sebagai berikut. (1) geometri dapat dipandang sebagai bantuan utama ketika berkomunikasi dan berperan penting untuk *problem solving*, selain itu di kehidupan sehari-hari, geometri mudah dijumpai dalam astronomi, ilmu kebumian, ilmu tentang flora dan fauna, bahkan hingga karya seni arsitektur serta sistem mekanik (2) geometri membantu seseorang agar memsiliki persiapan yang berharga ketika belajar matematika dan sains, dari tingkat dasar hingga tingkat yang lebih tinggi, serta membantu berbagai karir yang membutuhkan keterampilan matematika, (3) geometri memberikan kesempatan untuk mengembangkan persepsi spasial, (4) geometri penuh teka-teki dan menarik (5) geometri berfungsi sebagai fasilitas untuk merangsang dan melatih keterampilan berpikir, serta (6) geometri dapat mengantarkan individu atau sekelompok manusia memiliki nilai budaya dan estetika (Sherard, 1981; Walle, 1994).

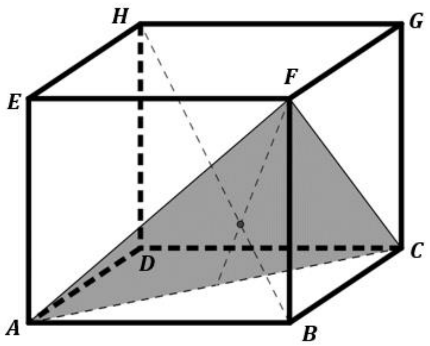
Dalam kurikulum pendidikan di Indonesia materi geometri diajarkan pada semua jenjang sekolah, terutama dalam matematika sekolah tingkat menengah atas. Terdapat materi yang meliputi prinsip-prinsip geometri seperti trigonometri pada kelas X, transformasi geometri pada kelas XI, dan bangun ruang dimensi tiga di kelas XII (Peraturan Menteri Pendidikan, 2018). Tiap materi geometri yang disajikan dalam matematika sekolah tentu memiliki ciri khas dan tingkat kesulitan masing-masing. Sebagai contoh materi bangun ruang dimensi tiga, secara konvensional materi ini mengharuskan siswa untuk memahami cara menggambar bangun ruang dimensi tiga di bidang dua dimensi (papan tulis atau kertas), kemudian membuat garis-garis bantu atau bidang bayang yang bisa saja membuat gambar menjadi lebih rumit, serta yang terakhir menuntut individu tersebut untuk mampu menerapkan rumus yang tepat sesuai dengan pertanyaan soal (Alghadari, 2017). Dengan perkembangan teknologi saat ini, memahami objek dalam bangun ruang dimensi tiga sudah semakin mudah dan semakin didukung, bahkan berdampak pada semakin kayanya pembelajaran matematika sekolah (Adelabu et al., 2019). Namun, dukungan teknologi ini tidak sekaligus mengatasi kelemahan hitung geometri ruang, karena keterampilan ini dihasilkan dari kombinasi kemampuan menjawab persoalan geometri, cara memanfaatkan peta, dan representasi dalam ruang dimensional, sehingga penyebab kelemahan dalam menghitung geometri secara spasial adalah akibat kombinasi kemampuan penunjang seperti kemampuan spasial yang tidak tepat (Yilmaz, 2017). Selain itu, strategi pengajaran yang tepat dan pengaturan waktu penyampaian, serta urutan penyampaian materi menjadi salah satu hal yang seharusnya diperhatikan.

Urutan penyampaian materi bangun ruang dimensi tiga dalam kurikulum yang diterapkan di Indonesia telah mengalami perubahan. Hal ini dapat dilacak dari pemberlakuan Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan (KTSP) yang diberlakukan tahun 2006 silam. Di KTSP, materi bangun ruang dimensi tiga disampaikan di kelas X semester genap, sedangkan di Kurikulum 2013 (K13) materi ini diletakkan pada kelas XII semester ganjil (BSNP, 2006; Keputusan Balitbang Tentang Kompentensi Inti Dan Kompetensi Dasar Pelajaran Pada Kurikulum 2013 Pada PAUD, Dikdas, dan Dikmen Berbentuk Sekolah Menengah Atas Untuk Kondisi Khusus, 2020), sehingga selama K13 diberlakukan (hingga tahun 2020) materi bangun ruang dimensi tiga sangat sering dijelaskan terburu-buru karena pada saat yang sama para guru dituntut untuk menyelesaikan materi sekaligus mengejar *deadline* Ujian Nasional Berbasis Komputer (UNBK). Dampak dari peletakkan materi dimensi tiga di kelas XII membuat tidak sedikit guru untuk mengajarkan cara cepat ketika menyelesaikan soal (Fahlevi, 2020). Salah satu cara cepat yang populer dan sering peneliti temui adalah tentang penerapan rumus jarak antara titik ke bidang dalam suatu bangun ruang dimensi tiga. Sebelum membahas rumus cepat yang dimaksud, terlebih dahulu akan dijelaskan pengertian jarak dalam bangun ruang dimensi tiga.

Jarak antara dua komponen (antar titik, titik dengan garis, dan titik dengan bidang) dalam suatu bangun ruang dimensi tiga menjadi salah satu bagian materi matematika yang dipelajari siswa (Rahadi, 2018). Berbicara tentang konsep geometri, khususnya jarak dalam tiga dimensi, akan dapat memunculkan persepsi dan pengalaman belajar yang berbeda di antara orang-orang (Alghadari et al., 2020). Jarak

dalam bangun ruang dimensi tiga sebenarnya telah memiliki definisi yang baku. Jarak dapat dipahami sesuai dengan komponen yang terlibat di dalamnya.
Dalam buku pendamping belajar (buku teks pelajaran) yang digunakan sekolah-sekolah di Indonesia, rumus-rumus yang digunakan untuk menentukan jarak antar komponen dalam bangun ruang dimensi tiga berbasis pendekatan spasial. Proses penghitungannya melibatkan rumus geometri yang konvensional, seperti konsep kesebangunan, rumus luas segitiga, penerapan teorema Pythagoras, dan rumus-rumus perbandingan dalam trigonometri (Rahadi, 2019). Namun, beberapa hasil kajian menunjukkan bahwa konsep-konsep geometri lainnya seperti analisis vektor (vektor ruang) dan matriks dapat juga digunakan untuk membantu perhitungan jarak dalam bangun ruang dimensi tiga, meskipun tidak bertujuan untuk meningkatkan kemampuan spasial siswa (Alghadari, 2017; Rahadi, 2019; Fahlevi, 2021). Namun pada kondisi-kondisi tertentu, peserta didik juga sering diajarkan cara cepat dalam menentukan hasil-hasil pengukuran jarak dalam soal bangun ruang dimesnsi tiga. Berikut contoh soal serta penyelesaiannya dengan cara cepat.

Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk $6\ cm$. Jarak dari titik B ke bidang AFC adalah? Pembahasan terdapat pada gambar 1.



Pembahasan dengan cara cepat:

$B \to AFC$

$= \frac{1}{3} \times diagoal\ ruang$

$= \frac{1}{3} \times 6\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\ cm$ ■

sumber gambar: dokumen pribadi

Gambar 1. Kubus ABCD.EFGH dan Cara Cepat Penyelesaian Soal

Mayoritas rumus cepat yang diketahui siswa biasanya diperoleh dari lembaga bimbingan belajar. Siswa sering menganggap rumus cepat adalah sesuatu yang sekedar digunakan tanpa harus mengetahui konsep dasar matematika yang menjadi penyebab rumus cepat tersebut dapat diterapkan pada soal. Hal tersebut semakin lumrah karena rumus cepat menjadi daya tarik bagi bimbingan belajar untuk menarik minat siswa agar banyak yang bergabung (Widodo et al., 2015).
Penggunaan rumus cepat tanpa dasar konsep yang matang dapat memberi dampak buruk bagi budaya belajar matematika, karena secara nyata dapat mendorong siswa pada budaya non-konstruktif, siswa tidak akan memiliki waktu luang serta kesempatan untuk belajar. Lebih lanjut siswa bahkan dapat kehilangan kemampuan untuk berpikir kreatif, rasional, dan analitis, yang akan menghambat kemampuan mereka untuk mencapai tujuan belajar matematika. Keadaan seperti ini dapat dihindari jika siswa memahami prinsip-prinsip dasar rumus cepat dan mengetahui persyaratan yang harus dipenuhi agar rumus cepat dapat diterapkan. Para guru di sekolah dapat membantu siswanya dalam memperoleh pemahaman ini. Guru dapat melakukan diskusi mendalam dengan siswa tentang situasi tertentu dalam suatu persoalan, kemudian meminta siswa memberikan argumen mereka sendiri, yang secara terus-menerus diarahkan untuk sampai pada pemahaman rumus cepat yang tepat (Herdian, 2019).

Berdasarkan uraian di atas, melalui penelitian ini peneliti berupaya untuk berkontribusi memberikan bukti-bukti matematis suatu rumus cepat agar dapat menjadi referensi bagi para guru atapun bagi para pendidik secara umum. Adapun rumus cepat yang akan dibuktikan terbatas pada rumus untuk menentukan jarak pada contoh soal bangun ruang dimensi tiga yang telah dibahas sebelumnya. Pembuktian rumus cepat dalam penelitian ini akan dijelaskan dari berbagai sudut pandang menggunakan berbagai materi yang masih dalam ruang lingkup geometri, seperti konsep kesebangunan, konsep luasan segitiga, konsep bangun ruang dimensi tiga itu sendiri, geometri analitis (dengan koordinat Kartesius), serta analisis vektor (vektor ruang).
Aktivitas pembuktian dalam penelitian ini sangat relevan dengan kebutuhan pengajaran matematika saat ini. Melalui pemamaham pembuktian-pembuktian rumus yang ada, guru dapat menambah wawasannya dalam mengolah bahan ajar. Sajian pembuktian rumus yang telah dibuktikan dapat disajikan sebagai salah satu bahan ajar untuk mengasah kemampuan bernalar dan kemampuan

pembuktian matematis. Kemampuan pembuktian matematis merupakan bagian dari kemampuan penalaran matematis, dan menjadi salah satu kemampuan penting dalam pembelajaran matematika (Herizal, 2020). Adapun salah satu tujuan pembelajaran matematika di Indonesia adalah untuk meningkatkan kemampuan tersebut karena berguna untuk melatih kemampuan berpikir matematis tingkat tinggi (Herizal et al., 2020).

METODE

Ide penulisan artikel ini menggunakan pendekatan penelitian kepustakaan yang berbahan referensi kajian pustaka (*library research*). Penelitian kepustakaan tergolong jenis kualitatif sehingga memerlukan analisis deskriptif (Darmalaksana, 2020). Teknik analisis data yang digunakan dalam penelitian kepustakaan meliputi metode analisis isi yang diterapkan secara sistematis terhadap catatan atau dokumen sebagai sumber data untuk menjamin keabsahan baik dokumen hukum maupun dokumen kebijakan serta temuan dari penelitian (Hardani et al., 2020). Adapun instrumen yang sesuai dalam penelitian ini berupa daftar kategori bahan penelitian, rencana penulisan (cara pembuktian), dan struktur catatan penelitian (cara penyampaian pembuktian) (Awalina & Purwoko, 2018).

Kepustakaan dalam *library research* bersumber dari buku, artikel ilmiah, dan literatur-literatur relevan lainnya yang dijadikan sebagai sumber ide untuk membangkitkan gagasan atau pemikiran lain tanpa harus melakukan riset lapangan (Sari & Asmendri, 2020). Dalam penelitian kepustakaan ini, kepustakaan utama meliputi buku dan artikel yang memaparkan tentang penggunaan rumus jarak dalam dimensi tiga serta ragam materi yang dapat digunakan menjadi kerangka dasar pembuktian. Pembuktian dalam artikel ini dibagi berdasarkan cakupan materi geometri yang diajarkan dalam matematika sekolah yang meliputi: (1) geometri dimensi dua, (2) sistem koordinat (koordinat Kartesius dalam geometri), (3) geometri dimensi tiga, dan (4) analisis vektor (vektor ruang).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil

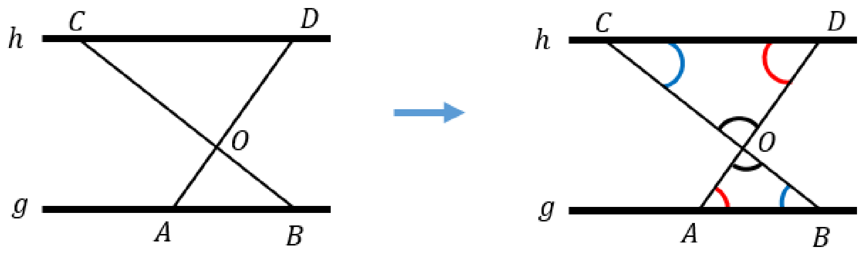
Standar isi dalam pendidikan matematika untuk Sekolah Menengah Atas di Indonesia telah diuraikan dalam Peraturan Menteri Pendidikan. Adapun peraturan terbaru tercantum dalam Permendikbud No. 7 Tahun 2022, tentang Standar Isi Pada Pendidikan Anak Usia Dini, Jenjang Pendidikan Dasar, dan Jenjang Pendidikan Menengah. Dalam Permendikbud tersebut dijelaskan bahwa standar isi matematika sekolah menengah membahas mengenai penerapan teorema Pythagoras untuk menentukan sudut dan jarak (Permendikbud Tentang Standar Isi Pada PAUD, Dikdas, Dikmen, 2022). Namun, jika kembali menelaah Permendibud No. 37 Tahun 2018, tentang Kompetensi Inti Dan Kompetensi Dasar Pelajaran Pada Kurikulum 2013 Pada Pendidikan Dasar Dan Pendidikan Menengah, dijelaskan bahwa rincian materi matematika yang dipelajari siswa ketika masuk pendidikan menengah atas terdiri dari berbagai macam materi geometri. Materi bangun ruang dimensi tiga dicantumkan sebagai materi kelas XII dengan Kompetensi Dasar (KD.) 3.1 dengan tujuan untuk mendeskripsikan jarak dalam ruang (antar titik, titik ke garis, dan titik ke bidang) (Peraturan Menteri Pendidikan, 2018).

Dalam pembuktian rumus cepat peneliti mengedepankan beberapa aspek geometri. Aspek tersebut terdiri dari konsep kesebangunan dan konsep luasan segitiga (dibahas lebih mendalam pada geometri dimensi dua), bangun ruang dimensi tiga itu sendiri (geometri dimensi tiga), geometri dalam sistem koordinat, dan analisis vektor (vektor ruang). Lima aspek ini dijelaskan mulai dari pengenalannya di matematika sekolah sesuai kurikulum di Indonesia.

Terdapat banyak jenis geometri. Matematika sekolah dikhususkan untuk memperkenalkan geometri bidang (geometri Euclidean) yang disarankan untuk dipelajari secara sintetik (tanpa sistem koordinat) dan secara analitis (dengan sistem koordinat). Pada tingkat pelajaran matematika yang lebih tinggi, siswa akan mulai membentuk pemahaman secara formal yang berkaitan dengan pengalaman geometri mereka dari sekolah dasar dan menengah, menggunakan definisi yang lebih tepat serta mengembangkan berbagai pembuktikan yang lebih cermat. Kompetensi dasar untuk kelas dua dan tiga sekolah dasar memuat tentang konsep luas suatu bidang datar seperti segitiga sebagai pengenalan mendasar geometri dimensi dua (KD. 3.9 kelas dua dan KD. 3.8 kelas tiga). Standar untuk kelas delapan dan sembilan bertujuan untuk memperkenalkan sistem koordinat Kartesius pada siswa, selain itu pada tingkatan ini siswa juga diminta untuk mengamati ragam bentuk segitiga yang berkaitan dengan teorema Pythagoras serta segitiga siku-siku dan penerapannya dalam pemecahan masalah, kemudian siswa diarahkan untuk mengeksplorasi untuk membandingkan sepasang segitiga sebagai cara untuk menentukan apakah terdapat kongruensi atau kesebangunan antara dua bidang tersebut (KD. 3.2 dan 3.6 kelas delapan, serta KD. 3.6 kelas sembilan). Lebih lanjut, di Sekolah Menengah Atas dalam kompetensi dasar kelas sepuluh, siswa diminta menyelidiki segitiga yang berkaitan dengan pemahaman terhadap konsep rasio trigonometri serta pemecahan masalah dengan menggunakan segitiga siku-siku (KD. 3.7). Masih di kelas sepuluh (matematika peminatan) siswa diperkenalkan materi irisan antara aljabar dan geometri yaitu analisis vektor (yang dihubungkan pada geometri koordinat), siswa diminta membuktikan teorema geometris dengan menggunakan koordinat dan menggambarkan bentuk dengan garis berarah (KD. 3.2, matematika peminatan kelas sepuluh), serta yang terakhir di kelas dua belas, geometri siswa akan dihadapkan dengan bangun ruang tiga dimensi (Perry, Hall, & Thomas W. Campbell, 2019; Kemendikbud, 2018).

Geometri dimensi dua dalam artikel ini akan melibatkan dua materi, yakni konsep kesebangunan dan konsep luas segitiga. Konsep kesebangunan (*similarity*) dalam matematika sekolah didefinisikan secara langsung kedalam hal-hal yang berkaitan dengan gambar dan sifat-sifatnya, serta hanya untuk kasus-kasus khusus seperti segitiga dan poligon lainnya, umumnya simbol sebangun (*similarity*) dituliskan dengan bentuk " $\sim$ " (Wijayanti, 2019). Definisi umum kesebangunan antar poligon dalam buku teks tingkat sekolah menengah dan bahkan perguruan tinggi adalah sebagai berikut:
Dua poligon sebangun (*similar*) jika dan hanya jika dua kondisi (S1 dan S2) terpenuhi.
S1. Semua pasangan sudut yang bersesuaian kongruen
S2. Semua pasangan sisi yang bersesuaian sebanding

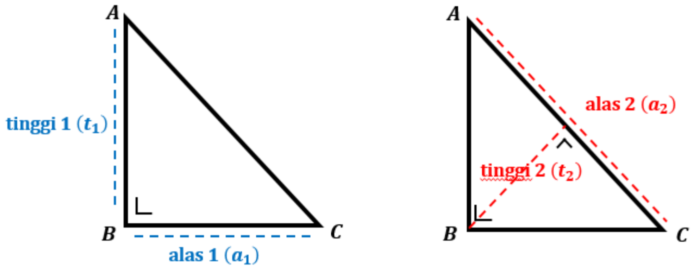
Kasus khusus untuk segitiga, S1. dan S2. adalah ekuivalen, sehingga konsep sebangun dalam kasus khusus ini dapat ditentukan cukup dengan menggunakan salah satu dari syarat tersebut (Alexander & Koeberlein, 2020). Lebih lanjut, ilustrasi kesebangunan dapat dipahami dari gambar 2.



sumber gambar: dokumen pribadi

Gambar 2. Ilustrasi Dua Segitiga yang Saling Sebangun (*Similar*)

Diberikan dua garis sejajar, garis g dan h, sedemikian hingga $\Delta ABO \sim \Delta DCO$. Pernyataan ΔABO dan ΔCOD sebangun karena memenuhi S1. Pandang bahwa besar $\angle OAB = \angle ODC$ yang saling bersebrangan dalam, begitu juga dengan besar $\angle OBA = \angle OCD$ yang saling bersebrangan dalam, sedangkan untuk besar $\angle AOB = \angle COD$ merupakan dua sudut yang saling bertolak belakang.
Selanjutnya, materi dimensi dua yang dilibatkan dalam pembuktian pada penelitian ini adalah tentang konsep luas segitiga. Rumus luas segitiga yang selama ini dipelajari cukup beragam, mulai dari rumus luas segitiga yang melibatkan alas dan tinggi segitiga, rumus luas segitiga dengan aturan sinus (trigonometri), serta rumus luas segitiga dengan aturan Heron (Adhistya, 2018; As'ari et al., 2017; Darma, 2017). Dalam penelitian ini, rumus luas segitiga yang akan digunakan akan berfokus pada rumus luas segitiga yang melibatkan alas dan tinggi segitiga. Hal yang perlu dicermati bahwa rumus luas segitiga yang melibatkan alas dan tinggi segitiga ini dapat melibatkan alas dan tinggi segitiga yang berbeda (di segitiga yang sama) namun menghasilkan perhitungan yang sama.



sumber gambar: dokumen pribadi

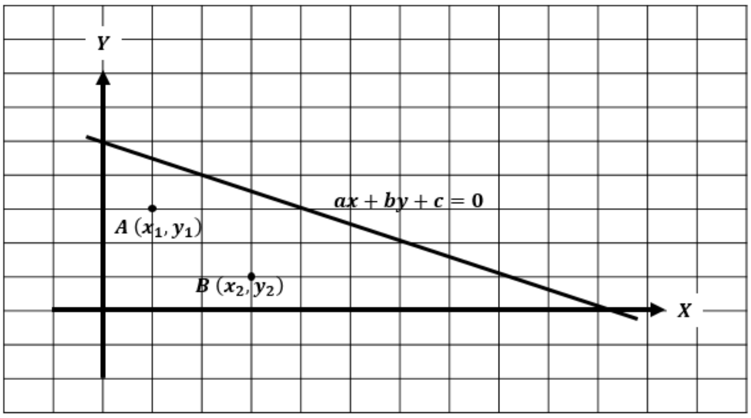
Gambar 3. Luas Segitiga dengan Alas dan Tinggi yang Berbeda

Perhatikan bahwa luas segitiga ABC pada gambar 3. adalah sebagai berikut.

$$L_{\Delta\, ABC} = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t_1 = \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot t_2 \tag{1}$$

Sistem Koordinat (Koordinat Kartesius Dalam Geometri)

Dalam pembuktian rumus cepat yang ditulis dalam artikel ini, konsep yang digunakan dalam sistem koordinat adalah mengenai rumus persamaan garis yang melalui dua titik dan rumus jarak suatu titik ke garis yang ditulis bersesuaian dengan (Fahlevi, 2020).



sumber gambar: dokumen pribadi

Gambar 4. Titik dan Garis dalam Koordinat Kartesius

Perhatikan gambar 4 di atas. Dengan menggunakan konsep gradien (*slope)* garis, maka untuk menentukan persamaan garis yang melalui titik A dan B dituliskan sebagai berikut.

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{2}$$

selanjutnya rumus jarak dari titik $A(x_1, y_1)$ ke garis $ax + by + c = 0$ yang telah dibuktikan Larson (2012) dalam bukunya, adalah sebagai berikut.

$$d = \left| \frac{a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \tag{3}$$

Geometri Dimensi Tiga

Pembuktian rumus jarak dalam bangun ruang dimensi tiga juga ternyata dapat dilakukan melalui pemahaman konsep yang lebih mendalam tentang materi bangun ruang dimensi tiga itu sendiri. Rumus yang terlibat dalam pembuktian ini memuat rumus luas segitiga yang bersesuaian dengan persamaan (1), perbandingan trigonometri, misalnya untuk menentukan nilai $\sin\theta$ (dengan $\angle\theta$ sembarang sudut bukan siku-siku) pada suatu segitiga siku-siku.

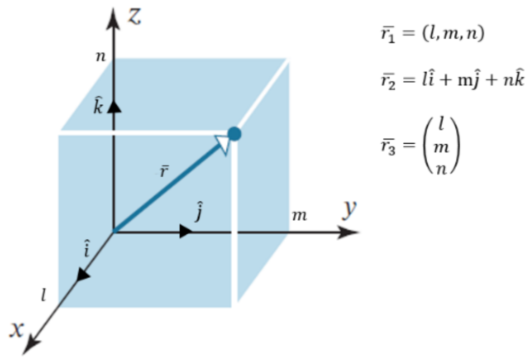
$$\sin\theta = \frac{\text{depan sisi sudut } \theta}{\text{sisi miring dalam } \Delta} \tag{4}$$

selain rumus-rumus yang serupa dengan (4) juga dilengkapi dengan teknik menggambar garis bantu.

Analisis Vektor (Vektor Ruang)

Aljabar vektor adalah salah satu kontribusi terbesar di bidang matematika yang dikemukakan oleh matematikawan Amerika, J. Willard Gibbs pada tahun 1901 (Alghadari, 2017). Salah satu bahasan dalam aljabar vektor adalah bidang vektor, terutama dalam dimensi tiga Euclidean. Aljabar vektor memiliki istilah lain yang juga sering dikenal, yakni analisis vektor (Naufal, 2015). Meskipun konsep vektor disebut sebagai cabang aljabar (yang dibahas lebih mendalam di aljabar linier), namun analisis vektor menjadi salah satu yang terpenting dan menjadi dasar untuk mempelajari aljabar geometri. Vektor disajikan dalam tiga bentuk, yakni vektor baris $(\overline{r_1})$, vektor basis $(\overline{r_2})$, dan vektor kolom $(\overline{r_3})$

(Gibbs & Wilson, 1901). vektor menjadi salah satu yang terpenting dan menjadi dasar untuk mempelajari aljabar geometri. Lebih lanjut dapat kita lihat pada gambar 5.



sumber gambar: Alghadari (2017); Anton & Kaul (2019)

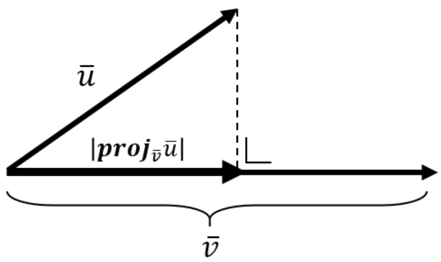
Gambar 5. Ilustrasi Vektor dalam Koordinat Ruang (Dimensi Tiga)

Dalam pembuktian pada penelitian ini, konsep yang dilibatkan dalam analisis vektor terdiri dari *cross product*, normal bidang, dan panjang proyeksi (proyeksi skalar ortogonal), yang akan dijelaskan bersesuaian dengan Gibbs & Wilson (1901) dan Anton & Kaul (2019) sebagai berikut.

Jika $\bar{u} = u_1 i + u_2 j + u_3 k$ dan $\bar{v} = v_1 i + v_2 j + v_3 k$ adalah vektor dalam dimensi tiga, maka *cross product* $\bar{u} \times \bar{v}$ didefinisikan sebagai berikut.

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} k \tag{5}$$

Selanjutnya normal bidang. Normal bidang didefinisikan sebagai vektor hasil *cross product* antara dua vektor yang tidak saling sejajar dan tidak segaris. Hasil perhitungan normal bidang dapat menggunakan *cross product* yang dijelaskan pada persamaan (5). Berikutnya adalah panjang proyeksi (proyeksi skalar ortogonal), panjang proyeksi $\bar{u}$ pada $\bar{v}$ dinotasikan sebagai $|\boldsymbol{proj}_{\bar{v}}\bar{u}|$ diilustrasikan dan ditentukan sebagai berikut.



sumber gambar: dokumen pribadi

Gambar 6. Ilustrasi Panjang Proyeksi Vektor $\bar{u}$ pada $\bar{v}$ ($|\boldsymbol{proj}_{\bar{v}}\bar{u}|$)

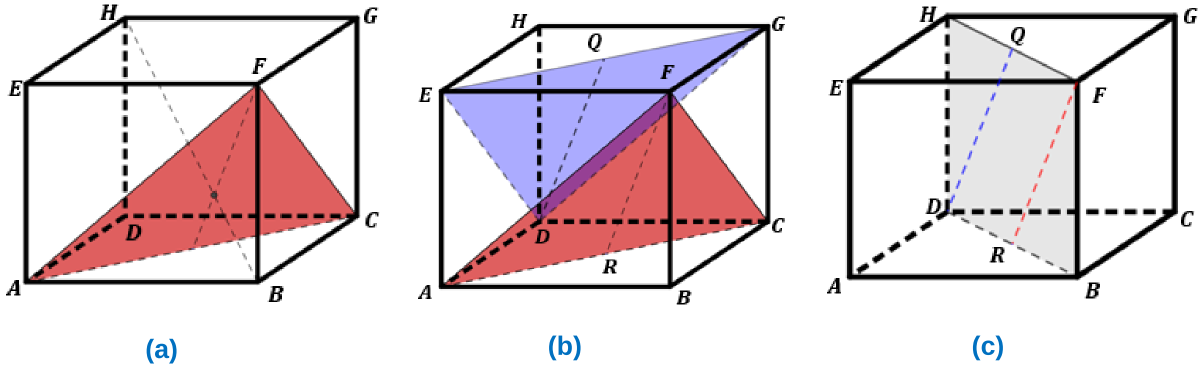
Pembahasan

Pada bagian ini akan diuraikan pembuktian rumus cepat jarak dalam bangun ruang dimensi tiga. Bangun ruang yang dibahas terbatas hanya pada kubus seperti yang telah diuraikan dalam bagian pendahuluan. Bahasan yang hanya berfokus pada kubus didasari atas keterlibatan konsep yang sangat banyak jika melibatkan bangun ruang lainnya. Pembahasan ditinjau dari berbagai ruang lingkup geometri, dimulai dari konsep kesebangunan, luas segitiga, bangun ruang dimensi tiga, sistem koordinat, serta vektor.

Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk r satuan $(r > 0)$, akan dibuktikan bahwa jarak dari titik B ke bidang AFC adalah $\frac{1}{3}$ diagonal ruang $= \frac{1}{3} r\sqrt{3}$.

Dalam konteks bangun ruang, jarak suatu titik ke bidang dapat diubah menjadi jarak titik ke garis. Hal ini dapat dilakukan dengan dasar konsep proyeksi ortogonal. Proyeksi ortogonal adalah proyeksi garis lurus dari suatu titik ke suatu garis. Berdasarkan Gambar 7(c) jarak titik B ke bidang AFC

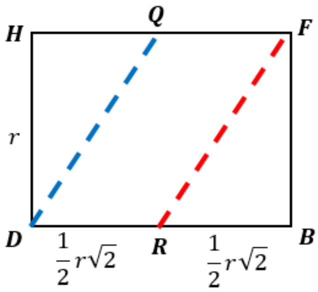
dapat disederhanakan menjadi jarak titik B ke garis FR, dengan $BF = DH = r$ satuan dan $BDFH = r\sqrt{2}$ satuan (karena diagonal bidang), serta titik Q dan R berada ditengah-tengah diagonal bidang FH dan BD.



sumber gambar: Fahlevi (2020) dan dokumen pribadi

Gambar 7. Kubus $ABCD.EFGH$ Beserta Garis dan Bidang Bantu

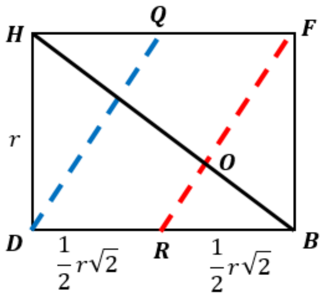
Lebih lanjut untuk memudahkan perhitungan, akan digambarkan bidang $BDHF$ di luar kubus $ABCD.EFGH$ sebagai berikut.



sumber gambar: Fahlevi (2020) dan dokumen pribadi

Gambar 8. Bidang Diagonal $BDHF$ dalam Kubus $ABCD.EFGH$

tarik garis dari titik B ke titik H sedemikian hingga garis BH akan berpotongan dengan garis FR, misal titik potong kedua garis tersebut adalah titik O sebagai berikut.



sumber gambar: dokumen pribadi

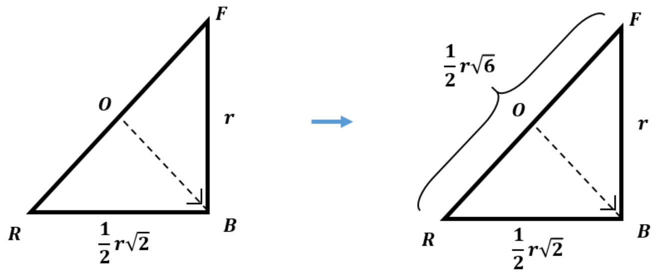
Gambar 9. Perpotongan Garis BH dan FR dalam Bidang $BDHF$

Telaah kembali kesebangunan dua segitiga dalam **gambar 2**. sedemikian sehingga dalam **gambar 9.** akan terdapat dua segitiga yang sebangun, yakni ΔBOR ~ ΔHOF. Adapun bukti kedua segitiga tersebut sebangun dapat dilacak melalui perbandingan sudut-sudut pada kedua segitiga yang dibahas. Pertama, $\angle BOR = \angle HOF$ karena saling bertolak belakang. Kedua, $\angle OBR = \angle OHF$ karena saling berseberangan dalam. Pernyataan pertama dan kedua mengakibatkan $\angle BRO = \angle HFO$. ΔBOR ~ ΔHOF membuat pasangan sisi yang bersesuaian sebanding, yakni:

$$\frac{BO}{OH} = \frac{BR}{FH} \tag{6}$$

karena R titik tengah BD maka $\frac{BO}{OH} = \frac{1}{2}$, sehingga $BO = \frac{1}{2}OH$ atau dengan kata lain $BO = \frac{1}{3}BH$ yang berarti jarak titik B ke garis FR adalah $\frac{1}{3}BH$ dan berakibat bahwa jarak titik B ke bidang AFC adalah $\frac{1}{3}\ BH$ atau dengan kata lain, jaraknya adalah $\frac{1}{3}r\sqrt{3}\ \left(\frac{1}{3}\text{ diagonal ruang}\right)$ ■

Pembuktian dengan konsep luas segitiga pada bagian ini merupakan pelengkap dari pembuktian sebelumnya. Konsep jarak dalam bangun ruang dimensi merupakan panjang ruas terpendek antara satu komponen ke komponen lainnya serta kedua komponen tersebut saling tegak lurus (Achmad, 2020). Dalam pembuktian dengan sebelumnya, telah ditunjukkan bahwa hasil perbandingan ruas garis yang menjadi jarak titik ke bidang, namun pembuktian tersebut belum menjamin ketegaklurusan antara titik B dengan bidang AFC (yang disederhanakan menjadi hubungan antara titik B dengan garis FR). Lebih lanjut, untuk menjamin ketegaklurusan antara titik B dengan garis FR perhatikan $\Delta\ BFR$ yang digambar ulang diluar bidang $BDHF$ berikut.



sumber gambar: dokumen pribadi

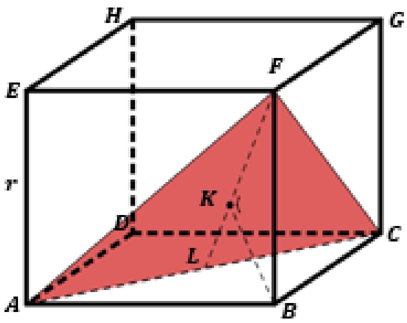
Gambar 10. Segitiga BFR dalam Bidang $BDHF$

$\Delta\ BFR$ merupakan segitiga siku-siku di titik B, dengan teorema Pythagoras didapat panjang sisi FR adalah $\frac{1}{2}r\sqrt{6}$. Berdasarkan sebelumnya. panjang ruas BO adalah $\frac{1}{3}r\sqrt{3}$, sehingga akan dibuktikan bahwa BO tegak lurus FR atau dengan kata lain BO adalah tinggi $\Delta\ BFR$ dengan alas FR. Untuk membuktikan pernyataan ini akan digunakan kesamaan dua luas segitiga yang melibatkan unsur alas dan tinggi yang berbeda pada segitiga yang sama, bersesuaian dengan persamaan (1). Berikut adalah pembuktian kesamaan dua luas segitiga dalam bahasan penelitian ini:

$$\begin{aligned}
L\ \Delta_{BFR} &= L\ \Delta_{BFR} \\
\frac{1}{2}\cdot a_1 \cdot t_1 &= \frac{1}{2}\cdot a_2 \cdot t_2 \\
\frac{1}{2}\cdot BR \cdot BF &= \frac{1}{2}\cdot FR \cdot BO \\
\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}r\sqrt{2}\cdot r &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}r\sqrt{6}\cdot\frac{1}{3}r\sqrt{3} \\
\frac{1}{4}r^2\sqrt{2} &= \frac{1}{12}r^2\sqrt{18} \\
\frac{1}{4}r^2\sqrt{2} &= \frac{1}{12}r^2\sqrt{9\cdot 2} \\
\frac{1}{4}r^2\sqrt{2} &= 3\cdot\frac{1}{12}r^2\sqrt{2} \\
\frac{1}{4}r^2\sqrt{2} &= \frac{1}{4}r^2\sqrt{2}
\end{aligned}$$
■

sehingga terbukti bahwa BO adalah tinggi $\Delta\, BFR$ dengan alas FR melalui pembuktian di atas, dengan dasar pembuktian menggunakan kedua strategi. Sehingga dapat dikatakan telah terbukti bahwa jarak titik B ke bidang AFC adalah $\frac{1}{3}r\sqrt{3}$ $\left(\frac{1}{3}\text{ diagonal ruang}\right)$, yang dijamin dari sisi sebagai ruas garis terpendek serta hubungan tegak lurus antara dua komponen terlibat (titik dan bidang).

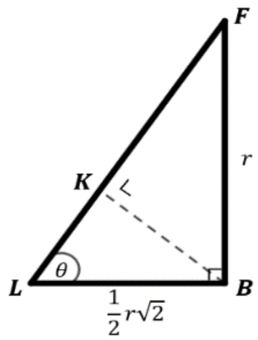
Perhatikan kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk r yang dilengkapi garis bantu (garis yang menembus bidang AFC) berikut.



sumber gambar: Fahlevi (2020) dan dokumen pribadi

Gambar 11. Kubus $ABCD.EFGH$ beserta Garis Tembus Bidang AFC

Tarik suatu garis dari titik B ke garis tinggi segitiga AFC. Misal FL adalah garis tinggi ΔAFC, maka garis BK adalah tinggi ΔBLF, sedemikian sehingga $BK \perp FL$. Garis BK menembus bidang AFC dan tegak lurus garis FL pada bidang AFC, yang artinya garis BK adalah jarak dari titik B ke bidang AFC. Hal ini berarti akan dibuktikan bahwa panjang ruas garis BK adalah $\frac{1}{3}r\sqrt{3}$. Lebih lanjut perhatikan $\Delta\, BFL$ yang digambar ulang di luar kubus $ABCD.EFGH$.



sumber gambar: Fahlevi (2020) dan dokumen pribadi

Gambar 12. Ilustrasi $\Delta\, BFL$ di Luar Kubus $ABCD.EFGH$

$$BF = r;\;\; BL = \frac{1}{2}DB = \frac{1}{2}r\sqrt{2}$$

$$FL^2 = BL^2 + BF^2 = \left(\frac{1}{2}r\sqrt{2}\right)^2 + r^2 = \frac{1}{2}r^2 + r^2 = \frac{3}{2}r^2$$

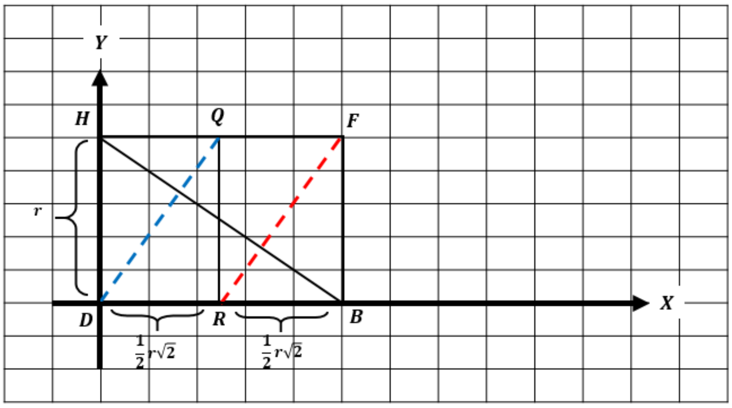
$$FL^2 = \frac{3}{2}r^2 \;\Leftrightarrow\; FL = \frac{1}{2}r\sqrt{6}$$

$\sin\theta = \frac{BF}{FL} = \frac{r}{\frac{1}{2}r\sqrt{6}} = \frac{1}{3}\sqrt{6},$ disisi lain $\sin\theta = \frac{BK}{BL},$ yang artinya $BK = \sin\theta \cdot BL$

sehingga $BK = \frac{1}{3}\sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}r\sqrt{2} = \frac{1}{6}r\sqrt{12} = \frac{1}{6}r\sqrt{4\cdot 3} = 2\cdot\frac{1}{6}r\sqrt{3} = \frac{1}{3}r\sqrt{3}$ ■

dengan pembuktian ini terbukti bahwa jarak titik B ke bidang AFC adalah $\frac{1}{3}r\sqrt{3}$ $\left(\frac{1}{3}\text{ diagonal ruang}\right)$.

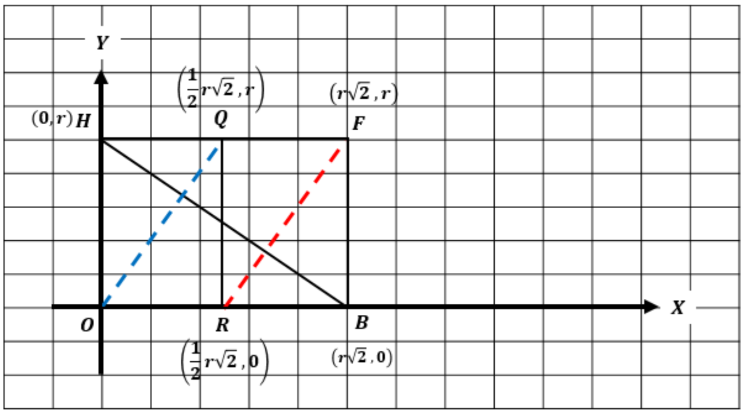
Pembuktian menggunakan konsep koordinat Kartesius yang akan dijabarkan dalam penelitian ini bersesuaian dengan Fahlevi (2020), ide utama pembuktian metode ini adalah dengan menyajikan ulang **Gambar 9.** ke dalam koordinat Kartesius, sebagai berikut.



sumber gambar: dokumen pribadi

Gambar 13. Bidang $BDHF$ Digambarkan dalam Koordinat Kartesius

Lebih lanjut, untuk memudahkan pembuktian dengan sistem koordinat, titik D akan diganti sebagai titik origin (O), selain itu akan dicantumkan koordinat tiap titik sebagai berikut.



sumber gambar: dokumen pribadi

Gambar 14. Koordinat Titik-titik $BOHF$ dalam Koordinat Kartesius

berdasarkan pembuktian dengan luas segitiga, jarak titik B ke bidang AFC dalam kubus $ABCD.EFGH$ sudah disederhanakan menjadi jarak titik B ke garis FR. Analogi dengan dengan hal tersebut, maka dalam pembuktian ini akan ditunjukkan tentang jarak titik B ke garis FR. Dalam pembuktian ini diperlukan persamaan garis FR. Adapun persamaan FR dapat ditentukan berdasarkan rumus pada persamaan (2). Misal koordinat titik R adalah titik (x_1, y_1) sehingga $x_1 = \frac{1}{2}r\sqrt{2};\ y_1 = 0$ dan koordinat titik $F\ (x_2, y_2)$ sehingga $x_2 = r\sqrt{2};\ y_2 = r$, maka persamaan garis FR dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 0}{r - 0} = \frac{x - \frac{1}{2}r\sqrt{2}}{r\sqrt{2} - \frac{1}{2}r\sqrt{2}}$$

$$\frac{y}{r} = \frac{x - \frac{1}{2}r\sqrt{2}}{\frac{1}{2}r\sqrt{2}}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathrm{r}\mathrm{y}\sqrt{2} &= \mathrm{r}\cdot\left(\mathrm{x}-\frac{1}{2}\mathrm{r}\sqrt{2}\right)\\
\frac{1}{2}\mathrm{y}\sqrt{2} &= \mathrm{x}-\frac{1}{2}\mathrm{r}\sqrt{2}\\
\frac{1}{2}\mathrm{y}\sqrt{2}-\mathrm{x}+\frac{1}{2}\mathrm{r}\sqrt{2} &= 0 \ \ (\text{kali } \sqrt{2} \text{ kedua ruas})\\
\mathrm{y}-\sqrt{2}\mathrm{x}+\mathrm{r} &= 0\\
-\sqrt{2}x+y+r &= 0
\end{aligned}
$$

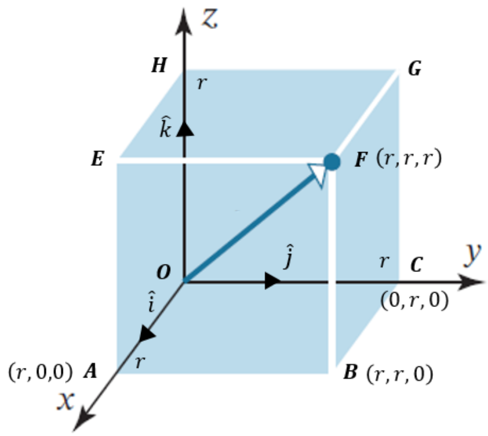
dengan koefisien pada persamaan tersebut adalah $a=-\sqrt{2}, b=1$, dan $c=r$. Ingat bahwa koordinat titik $B(r\sqrt{2},0)$ berakibat $x=r\sqrt{2}$ dan $y=0$, sehingga jarak titik B ke garis FR yang akan disimbolkan dengan d akan ditentukan dengan rumus yang bersesuaian dengan persamaan (3) sebagai berikut.

$$
d = \left|\frac{a\cdot x+b\cdot y+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \Rightarrow \left|\frac{-\sqrt{2}\cdot r\sqrt{2}+1\cdot 0+r}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2}}\right| \Rightarrow \left|\frac{-2r+0+r}{\sqrt{2+1}}\right|
$$

$$
\Rightarrow \left|\frac{-r}{\sqrt{3}}\right| \Rightarrow \frac{r}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{r}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{3}r\sqrt{3} \qquad \blacksquare
$$

dengan pembuktian pada ini terbukti bahwa jarak titik B ke bidang AFC (yang disederhanakan menjadi jarak antara titik B dengan garis FR) adalah $\frac{1}{3}r\sqrt{3}$ $\left(\frac{1}{3}\text{ diagonal ruang}\right)$.

Pembuktian menggunakan konsep analisis vektor akan dijabarkan bersesuaian dengan pembuktian dalam Alghadari (2017), perhatikan kubus $ABCO.EFGH$ dengan panjang rusuk r satuan yang terlihat pada gambar 15.



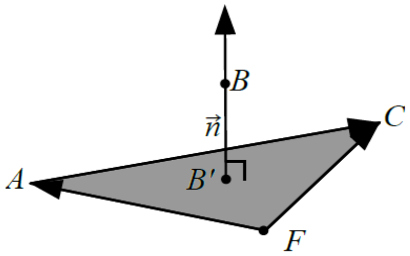
sumber gambar: Anton & Kaul (2019); dokumen pribadi

Gambar 15. Kubus ABCO.EFGH pada Koordinat Ruang dalam Vektor

Adapun komponen-komponen yang terlibat yakni titik B dengan koordinat $(r,r,0)$ dan bidang AFC dengan koordinat $A(r,0,0)$; $F(r,r,r)$; dan $C(0,r,0)$. Untuk menentukan jarak yang dimaksud akan ditentukan terlebih dahulu normal bidang menggunakan cross product yang bersesuaian dengan persamaan (4). Vektor yang terlibat adalah $\overline{AF}=(0,r,r)$ dan $\overline{AC}=(-r,r,0)$, sehingga *cross product* $\overline{AF}\times\overline{AC}$ adalah sebagai berikut.

$$\overline{AF} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & r & r \\ -r & r & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r & r \\ r & 0 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 0 & r \\ -r & 0 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 0 & r \\ -r & r \end{vmatrix} k = -(r^2)i - (r^2)j + (r^2)k$$

semua komponen vektor memiliki r^2, sehingga hasil *cross product* ini bisa dituliskan sebagai $\lambda(-1,-1,1)$. Hasil dari $\overline{AF} \times \overline{AC}$ dinyatakan sebagai normal bidang. Dalam notasi umum analisis vektor, normal bidang dapat disimbolkan dengan $\bar{n}$ (Gibbs & Wilson, 1901). $\bar{n}$ adalah vektor yang tegak lurus dengan $\overline{AF}$ dan $\overline{AC}$, selain itu $\bar{n}$ memiliki sifat akan selalu tegak lurus terhadap setiap vektor atau titik yang termuat dalam bidang (Gibbs & Wilson, 1901). Hal ini dapat diilustrasikan sebagai berikut.



sumber gambar: Alghadari (2017)

Gambar 16. Ilustrasi Hubungan Titik B terhadap Bidang AFC dalam Vektor

selanjutnya, untuk menentukan jarak titik B ke bidang AFC akan digunakan konsep panjang proyeksi (proyeksi skalar ortogonal) $\overline{BA} = (0,-r,0)$ pada vektor $\bar{n} = \lambda(-1,-1,1)$ dengan rumus yang bersesuaian dengan persamaan (6).

$$\text{Jarak } B \text{ ke } AFC = |\boldsymbol{proj}_{\overline{BA}}\, \bar{n}| = \frac{\overline{BA} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|} = \frac{\lambda(0 + r + 0)}{\lambda\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{\lambda r}{\lambda\sqrt{3}} = \frac{r}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}r\sqrt{3} \qquad \blacksquare$$

dengan pembuktian ini, juga terbukti bahwa jarak titik B ke bidang AFC adalah $\frac{1}{3}r\sqrt{3}$ $\left(\frac{1}{3}\text{ diagonal ruang}\right)$.

SIMPULAN

Suatu rumus yang telah diterapkan untuk menyelesaikan soal-soal pada pembelajaran matematika, ternyata memiliki beragam informasi serta pendekatan dari berbagai materi-materi yang saling berhubungan. Sama halnya dengan pembuktian-pembuktian pada penelitian ini, rumus cepat yang sering digunakan dalam pembelajaran matematika pada materi bangun ruang dimensi tiga yang konsep dasarnya sering terlupa untuk disampaikan ternyata dapat dibuktikan dengan pendekatan dari beragam materi geometri lain, yang meliputi: (1) Konsep kesebangunan dalam geometri dimensi dua, (2) Konsep luasan segitiga yang juga masih tercakup dalam geometri dimensi dua, (3) Konsep bangun ruang dimensi tiga itu sendiri, (4) Geometri analitis (dengan koordinat Kartesius), serta (5) Analisis vektor (vektor ruang). Kelima cara pembuktian yang telah diuraikan dalam penelitian ini memiliki konsep materi yang berbeda. Perbedaan tersebut dapat ditinjau dari cara menyajikan gambar-gambar bagian dalam kubus ke dalam gambar dimensi dua atau dalam koordinat Kartesius, bahkan disajikan dalam bentuk vektor, atau juga dapat dilacak melalui rumus yang digunakan, serta perbedaan konsep yang ada pada masing-masing materi. Penelitian masih memiliki kekurangan, terutama dari cakupan bahasan rumus yang dibuktikan hanya terbatas pada materi jarak pada salah satu bangun ruang dimensi tiga, yakni kubus. Penelitian ini memiliki kesempatan untuk dikembangkan dan dilanjutkan oleh peneliti berikutnya pada pembuktian rumus-rumus cara cepat lainnya. Melalui penelitian ini, peneliti berharap semakin banyak ragam penelitian mengenai pembuktian rumus-rumus matematika sekolah yang dapat membantu setiap guru dan para pendidik sebagai bahan referensi yang dapat digunakan untuk mendukung kemampuan berpikir kritis siswa.

DAFTAR PUSTAKA

Adelabu, F. M., Makgato, M., & Ramaligela, M. S. (2019). The importance of dynamic geometry computer software on learners' performance in geometry. *Electronic Journal of E-Learning*, *17*(1), 52–63.

Adhistya, R. (2018). *Penerapan Trigonometri dalam Pengembangan Ilmu dan Teknologi dalam Kehidupan Sehari-hari* (Issues 3–45). Direktorat Jenderal PAUD, dan Pendidikan Masyarakat,.

Alexander, D. C., & Koeberlein, G. M. (2020). Elementary Geometry for College Students. In *Cengage Learning, Inc. Unless*.

Alghadari, F. (2017). Menentukan Jarak pada Ruang Dimensi Tiga dengan Analisis Vektor. *Konferensi Nasional Penelitian Matematika Dan Pembelajarannya*, *2*, 85–94.

Alghadari, F., Herman, T., & Prabawanto, S. (2020). Factors Affecting Senior High School Students to Solve Three-Dimensional Geometry Problems. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *15*(3), 1–11. https://doi.org/10.29333/iejme/8234

Anton, H., & Kaul, A. (2019). *Elementary Linear Algebra* (T. Ward (ed.); 12th ed.). Wiley.

As'ari, A. R., Tohir, M., Valentino, E., Imron, Z., & Taufiq, I. (2017). *Buku Guru Matematika SMP/MTs Kelas VII* (Revisi). Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Awalina, W., & Purwoko, B. (2018). Studi Kepustakaan Penerapan Konseling Expressive Writing dalam Lingkup Pendidikan. *Jurnal BK UNESA*, *8*(2), 1–9.

Keputusan Balitbang tentang Kompentensi Inti dan Kompetensi Dasar Pelajaran pada Kurikulum 2013 pada PAUD, Dikdas, dan Dikmen Berbentuk Sekolah Menengah Atas Untuk Kondisi Khusus, Pub. L. No. Nomor 018/H/KR/2020, 106 (2020).

BSNP. (2006). *Standar Isi Untuk Satuan Pendidikan Dasar dan Menengah: Standar Kompetensi dan Kompetensi Dasar SMA / MA*. BNSP.

Darma, C. (2017). *Ragam Budaya Matematika Paket A Setara SD/MI Tingkatan II*. Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan. https://emodul.kemdikbud.go.id/A-Mtk-4/A-Mtk-4.pdf

Darmalaksana, W. (2020). Metode Penelitian Kualitatif Studi Pustaka dan Studi Lapangan. *Pre-Print Digital Library UIN Sunan Gunung Djati Bandung*, 1–6.

Fahlevi, M. R. (2020). *Dibalik Kehebatan Cara Cepat Matematika* (A'i Mulyani Az Zahra (ed.); 1st ed.). Ismaya Publishing.

Fahlevi, M. R. (2021). Number Formation Strategies to Simplify Calculations in Pythagoras Theorem. *Indonesian Digital Journal of Mathematics and Education*, *8*(2), 55–68. https://doi.org/10.53717/idealmathedu.v8i2.286

Gibbs, J. W., & Wilson, E. B. (1901). *Vector Analysis* (1st ed.). Yale University Press.

Hardani, Hikmatul, A. N., Ardiani, H., Fardani, R. A., Ustiawaty, J., Utami, E. F., Sukmana, D. J., & Istiqomah, R. R. (2020). *Metode Penelitian Kualitatif & Kuantitatif* (H. Abadi (ed.); 1st ed., Issue April). CV. Pustaka Ilmu.

Herdian, A. (2019). Rumus Cepat Dalam Pembelajaran Matematika, Angel or Devil? *UJMES (Uninus Journal of Mathematics Education and Science)*, *4*(1), 1–5.

Herizal, H. (2020). Faktor yang Memengaruhi Kemampuan Pembuktian Matematis Siswa. *Vygotsky*, *2*(1), 33. https://doi.org/10.30736/vj.v2i1.187

Herizal, Suhendra, & Nurlaelah, E. (2020). Pengaruh kemampuan memahami bukti matematis terhadap kemampuan mengonstruksi bukti matematis pada topik trigonometri. *Suska Journal of Mathematics Education*, *6*(1), 17–24. http://ejournal.uin-suska.ac.id/index.php/SJME/article/view/8115

In'am, A., & Islamiati, N. (2018). An Analysis of Students Mathematical Disposition using The Comic Media in Learning Geometry. *Advances in Social Science, Education and Humanities Research*, *231*(International Conference on Community Development (AMCA 2018)), 212–215. https://doi.org/10.2991/amca-18.2018.58

Peraturan Menteri Pendidikan, Pub. L. No. Nomor 37 Tahun 2018, Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan 1 (2018).

Permendikbud Tentang Standar Isi Pada PAUD, Dikdas, Dikmen, Pub. L. No. Nomor 7 Tahun 2022, 1 (2022).

Larson, R. (2012). *Precalculus: A Concise Course*. Cengage Learning. https://www.google.co.id/books/edition/Precalculus_A_Concise_Course/YbEWAAAAQBAJ?hl=id&gbpv=1&dq=proof+of+distance+between+point+to+the+line++formula+is+d+%3D+%7Cax1+%2B+by1+%2B+c%7C+/+√(a%5E2+%2B+b%5E2)&pg=PA424&printsec=frontcover

Naufal, M. (2015). *Perbandingan Antara Aljabar Vektor dan Aljabar Geometri*.

Perry, D. G., Hall, M. L., & Thomas W. Campbell, C. (2019). *Educators Guide for Mathematics Geometry*. West Virginia Department of Education.

Rahadi, A. P. (2018). Theoretical Study on Calculating Distance and Angle in the Three Dimensional Objects. *Padegogig Journal of Universitas Advent Indonesia*, *15*, 52–66. https://doi.org/10.35974/jpd.v1i1.642

Rahadi, A. P. (2019). Using Vector and Conventional Approach in Calculating Distance in a Three Dimensional Objectss: An Experimental Study. *Jurnal Padegogik Matematika*, *2*(2), 101–109. https://doi.org/10.35974/jpd.v2i2.876

Risnawati, Andrian, D., Azmi, M. P., Amir, Z., & Nurdin, E. (2019). Development of a definition maps-based plane geometry module to improve the student teachers' mathematical reasoning ability. *International Journal of Instruction*, *12*(3), 541–560. https://doi.org/10.29333/iji.2019.12333a

Sari, M., & Asmendri. (2020). Penelitian Kepustakaan (Library Research) dalam Penelitian Pendidikan IPA. *Natural Science*, *6*(1), 41–53. https://ejournal.uinib.ac.id/jurnal/index.php/naturalscience/article/view/1555/1159

Sherard, W. H. (1981). Why is geometry a basic skill? *The Mathematics Teacher*, *74*(1), 19–60. https://doi.org/10.5951/mt.74.1.0019

Walle, J. A. Van de. (1994). Elementary school mathematics: Teaching developmentally. In Longman (Ed.), *Longman* (Longman). Longman.

Walle, J. A. Van De, Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2019). *Elementary and Middle School Mathematics Teaching Developmentally* (SPi-Global (ed.); 10th ed., Vol. 10). Pearson.

Wasilah. (2018). The Design of Space based on Architectural Geometry. *SCITEPRESS – Science and Technology Publications, Lda. All Rights Reserved*, *Proceedings ofthe Built Environment, Science andTechnology International Conference (BESTICON 2018)*, 76–83. https://doi.org/10.5220/0008908500760083

Widodo, F., Nurhadi, & Budiati, A. C. (2015). Motivasi Siswa SMA Mengikuti Lembaga Bimbingan Belajar Di Kota Surakarta. *SOSIALITAS; Jurnal Ilmiah Pend. Sos Ant*, *5*(2), 1–23.

Wijayanti, D. (2019). Analysing Textbook Treatment of Similarity in Plane Geometry. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *24*, 107–132.

Yilmaz, H. B. (2017). On the development and measurement of spatial ability. *International Electronic Journal of Elementary Education*, *1*(2), 83–96.

Yorulmaz, A., & Çilingir Altıner, E. (2021). Do Geometry Self-Efficacy and Spatial Anxiety Predict the Attitudes Towards Geometry? *Mimbar Sekolah Dasar*, *8*(2), 205–216. https://doi.org/10.53400/mimbar-sd.v8i2.35914