JIPM: Jurnal Ilmu dan Pendidikan Matematika
Vol. 2 No. 1 April (2024)
e-ISSN: 2988-7763
DOI: 10.33830/hexagon.v2i1.7594

Alternatif Pembuktian Hasil Kali Gradien Dua Garis Tegak Lurus dalam Konteks Matematika Sekolah

Mahfudz Reza Fahlevi[1*]
[1] Institut Agama Islam Negeri Syaikh Abdurrahman Siddik Bangka Belitung, Bangka, Indonesia
* Corresponding Author. E-mail: mahfudzrezafahlevi@iainsasbabel.ac.id

ARTICLE INFO

Article history:
Received: February 13th, 2024
Revised: March 7th, 2024
Accepted: April 18th, 2024
Available: online April 30th, 2024

Kata Kunci:
gradien, garis tegak lurus, pembuktian

Keywords:
gradient, perpendicular lines, proof

ABSTRAK

Penelitian ini menyajikan ragam pembuktian konsep gradien garis, khususnya hasil kali gradien dua garis yang saling tegak lurus. Dalam matematika sekolah, konsep gradien cukup sering dijumpai. Namun, konsep tersebut jarang dilengkapi dengan penjelasan pembuktian yang akurat, sehingga dikhawatirkan menutup kesempatan siswa untuk berpikir kreatif dan berdampak buruk bagi budaya belajar matematika. Metode penelitian kualitatif digunakan melalui kajian kepustakaan yang bersumber dari video-video pembuktian dari Youtube (Math&music, Indrajana, dan MaThCliX®), paparan pembuktian dalam situs diskusi ilmiah Quora (Sagar), serta pembuktian yang disusun oleh peneliti. Dengan mengompilasikan sumber-sumber yang ada, peneliti berupaya untuk menyajikan bukti matematis konsep hasil kali gradien dua garis yang saling tegak lurus. Materi yang dilibatkan dalam penelitian ini meliputi: (1) rotasi sederhana suatu garis, (2) konsep perbandingan dan kesebangunan, (3) teorema Pythagoras, (4) konsep tangen/tan dalam Trigonometri, serta (5) konsep perkalian dot dua vektor. Hasil penelitian menunjukkan bahwa konsep perkalian gradien dua garis tegak lurus dapat dibuktikan melalui beragam materi matematika sekolah, sehingga layak dijadikan referensi bagi guru ketika ingin menjelaskan konsep ini dengan baik dan benar serta memiliki dasar pembuktian yang kuat. Penelitian ini dapat berkembang lebih lanjut dengan melengkapi bukti hasil kali gradien dua garis tegak lurus menggunakan konsep lain yang relevan dalam materi matematika sekolah.

ABSTRACT

This study presents multiple demonstrations of the concept of line gradients, particularly focusing on the multiplication of gradients of two perpendicular lines. The concept of gradient is commonly encountered in school mathematics; however, it is often lacking a precise evidential explanation, raising concerns about potentially limiting students' ability to think creatively and negatively impacting the mathematics learning culture. Qualitative research methods were employed, utilizing a literature review that included video evidence from YouTube channels such as Math&music, Indrajana, and MaThCliX®, as well as insights from the scientific discussion platform Quora (contributions from Sagar) and evidence compiled by researchers. By synthesizing these diverse sources, the study aims to provide a mathematical proof of the product of gradients of two perpendicular lines. The research material encompasses various topics, including: (1) the simple rotation of a line, (2) concepts of comparison and congruence, (3) the Pythagorean theorem, (4) the tangent/tan concept in Trigonometry, and (5) the dot product of two vectors. The findings demonstrate that the multiplication of gradients of perpendicular lines can be rigorously proven using established school mathematics principles, making it a valuable resource for educators seeking to effectively and accurately explain this concept with a solid evidential foundation. Future research could expand on this by incorporating additional relevant concepts from school mathematics to further enhance the proof of the product of gradients of perpendicular lines.

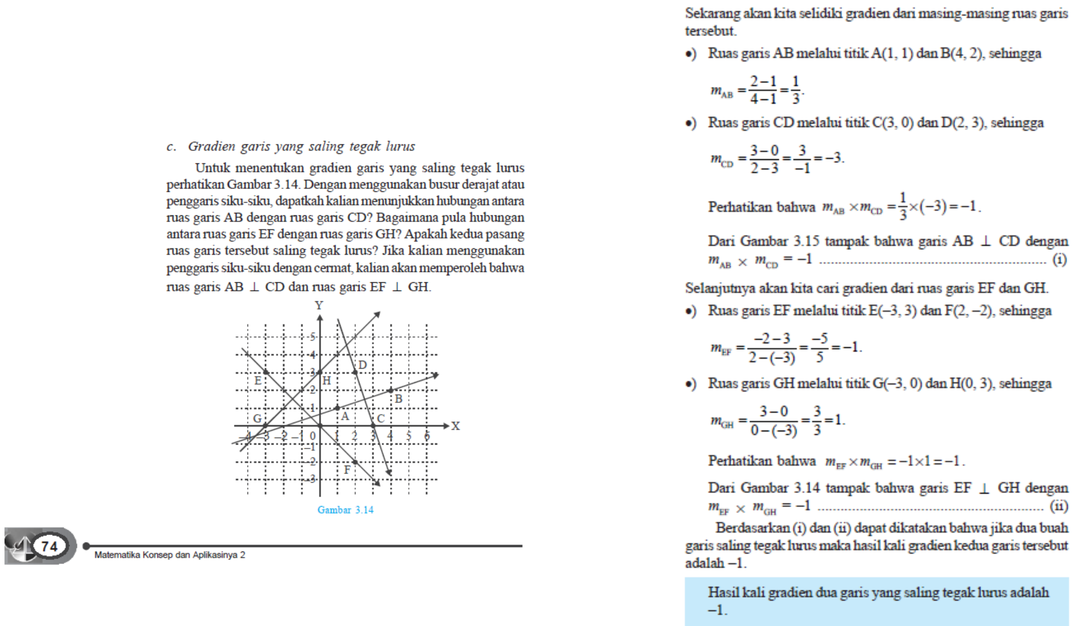
Fahlevi, R. M. (2024). Alternatif Pembuktian Hasil Kali Gradien Dua Garis Tegak Lurus Ditinjau Dari Materi Matematika Sekolah. *HEXAGON: Jurnal Ilmu dan Pendidikan Matematika*, *2*(1), 30-48. https://doi.org/10.33830/hexagon.v2i1.7594

PENDAHULUAN

Matematika telah menjadi salah satu mata pelajaran utama dalam sistem pendidikan Indonesia (Kamarullah, 2017). Dalam matematika terdapat banyak submateri yang perlu dipelajari, misalnya Aljabar. Aljabar adalah cabang matematika yang menggunakan huruf dan tanda atau simbol untuk menyatakan bilangan dan besaran (Farah et al., 2021). Sebagai salah satu bidang yang dipelajari dalam matematika, memahami konsep aljabar memerlukan pemahaman tentang pembuktian matematika. Dalam matematika, pembuktian adalah serangkaian argumen logis yang menjelaskan kebenaran suatu pernyataan (Syafri, 2017). Pembuktian penting untuk disampaikan dalam pembelajaran matematika agar dapat memberikan pengalaman pembelajaran bermakna, mencegah pembelajaran yang sifatnya hafalan, serta dapat membangun dasar berpikir matematis yang baik (Wiworo, 2022).

Aljabar tidak hanya dipandang sebagai materi yang penting, cara berpikir seseorang ketika belajar aljabar juga dapat dianalisis dan dapat dinyatakan dalam kategori tertentu (Sibgatullin et al., 2022). Namun, pentingnya mempelajari aljabar ternyata tidak diimbangi dengan hasil belajar yang memuaskan. Tercatat bahwa sebagian besar siswa mengalami kesulitan dalam mempelajari topik Aljabar (Malihatuddarojah & Prahmana, 2019; Lestari & Suryadi, 2020). Terdapat beragam materi aljabar yang ada dalam matematika sekolah. Salah satu materi aljabar yang dipelajari di tingkat Sekolah Menengah Pertama (SMP sederajat) adalah mengenai persamaan linier atau sering disebut juga persamaan garis lurus (Tosho, 2021a). Materi ini juga membahas pemahaman konsep mengenai kemiringan garis atau dikenal sebagai gradien (Tosho, 2021a).

Penjelasan tentang gradien dalam matematika sekolah telah ditopang oleh berbagai bahan ajar, salah satunya adalah buku teks (Choy et al., 2020). Di Indonesia, meski berganti kurikulum dan berganti buku teks, buku-buku tersebut telah menekankan pentingnya materi gradien dengan berbagai pendekatan, misalnya saja menggunakan ilustrasi hingga penggunaan contoh soal kasus per kasus (Nuharini & Wahyuni, 2008; As'ari et al., 2017; Tosho, 2021b). Hal tersebut ditujukan agar siswa terarah untuk memahami konsep gradien, terutama gradien mengenai hubungan dua garis yang saling sejajar atau saling tegak lurus. Adapun beberapa sajian materi yang menuntun siswa untuk membuktikan konsep gradien pada hubungan dua garis di buku teks matematika sekolah, sesuai kurikulum yang pernah berlaku di Indonesia adalah sebagai berikut:



c. Gradien garis yang saling tegak lurus

Untuk menentukan gradien garis yang saling tegak lurus perhatikan Gambar 3.14. Dengan menggunakan busur derajat atau penggaris siku-siku, dapatkah kalian menunjukkan hubungan antara ruas garis AB dengan ruas garis CD? Bagaimana pula hubungan antara ruas garis EF dengan ruas garis GH? Apakah kedua pasang ruas garis tersebut saling tegak lurus? Jika kalian menggunakan penggaris siku-siku dengan cermat, kalian akan memperoleh bahwa ruas garis AB ⊥ CD dan ruas garis EF ⊥ GH.

Gambar 3.14

74 Matematika Konsep dan Aplikasinya 2

Sekarang akan kita selidiki gradien dari masing-masing ruas garis tersebut.

- Ruas garis AB melalui titik A(1, 1) dan B(4, 2), sehingga

$$m_{AB} = \frac{2-1}{4-1} = \frac{1}{3}.$$

- Ruas garis CD melalui titik C(3, 0) dan D(2, 3), sehingga

$$m_{CD} = \frac{3-0}{2-3} = \frac{3}{-1} = -3.$$

Perhatikan bahwa $m_{AB} \times m_{CD} = \frac{1}{3} \times (-3) = -1$.

Dari Gambar 3.15 tampak bahwa garis AB ⊥ CD dengan $m_{AB} \times m_{CD} = -1$ .... (i)

Selanjutnya akan kita cari gradien dari ruas garis EF dan GH.

- Ruas garis EF melalui titik E(–3, 3) dan F(2, –2), sehingga

$$m_{EF} = \frac{-2-3}{2-(-3)} = \frac{-5}{5} = -1.$$

- Ruas garis GH melalui titik G(–3, 0) dan H(0, 3), sehingga

$$m_{GH} = \frac{3-0}{0-(-3)} = \frac{3}{3} = 1.$$

Perhatikan bahwa $m_{EF} \times m_{GH} = -1 \times 1 = -1$.

Dari Gambar 3.14 tampak bahwa garis EF ⊥ GH dengan $m_{EF} \times m_{GH} = -1$ .... (ii)

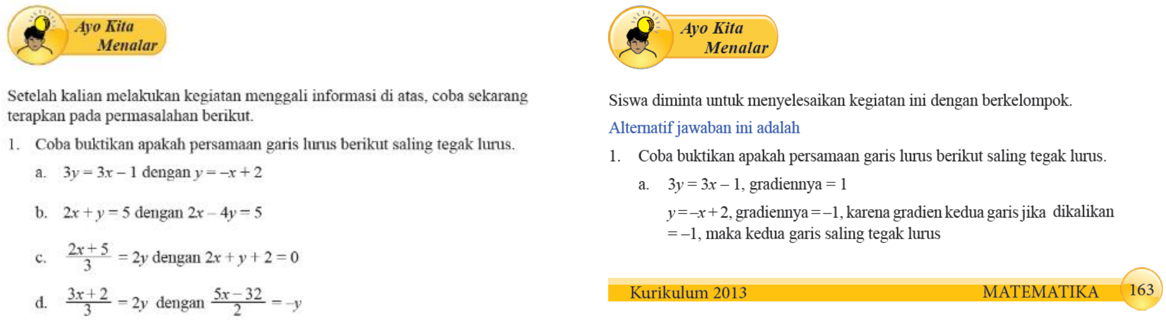
Berdasarkan (i) dan (ii) dapat dikatakan bahwa jika dua buah garis saling tegak lurus maka hasil kali gradien kedua garis tersebut adalah –1.

Hasil kali gradien dua garis yang saling tegak lurus adalah –1.

(a) (b)

Sumber: Nuharini & Wahyuni (2008)

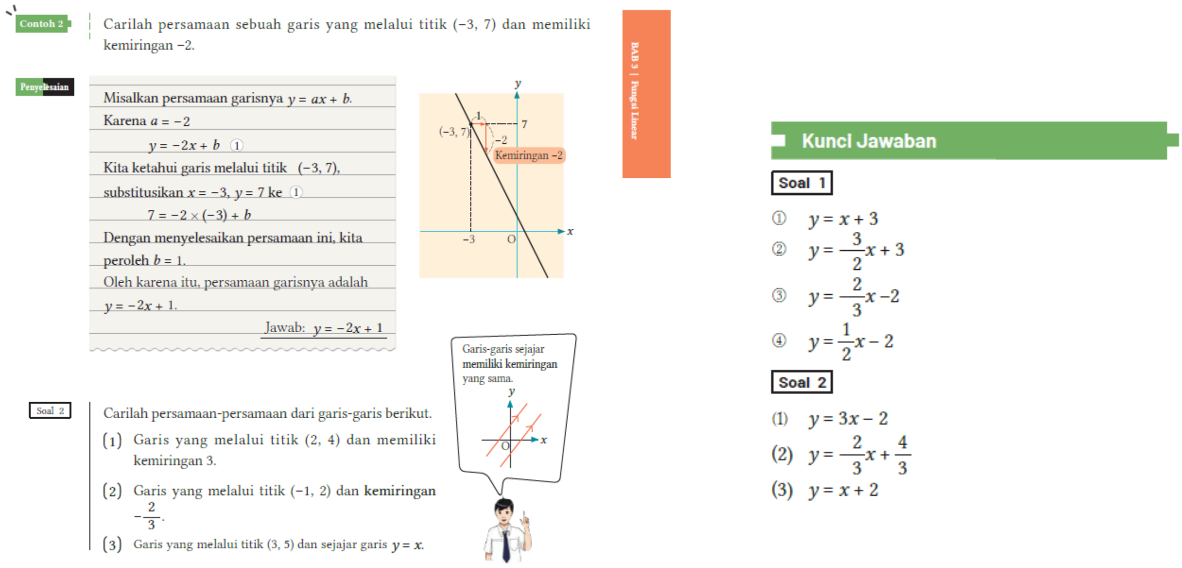
Gambar 1. Penjelasan tentang Konsep Gradien Dua Garis yang Saling Tegak Lurus dalam Buku teks Matematika Kurikulum KTSP. (a) Ilustrasi Awal (b) Penjelasan dan Kesimpulan



(a) (b)

Sumber: As'ari, Tohir, Valentino, Imron, et al., (2017)

Gambar 2. Instruksi untuk Memahami Konsep Gradien Dua Garis yang Saling Tegak Lurus dalam Buku teks Matematika Kurikulum 2013. (a) Perintah dalam Buku Siswa (b) Alternatif Penjelasan dalam Buku Guru



(a) (b)

Sumber: Tosho (2021a) & Tosho (2021b)

Gambar 3. Soal dan Informasi Bantuan untuk Memahami Konsep Gradien Dua Garis Sejajar dalam Buku teks Matematika Kurikulum Merdeka. (a) Perintah berupa Soal-soal dalam Buku Siswa (b) Penjelasan dalam Buku Guru

Sajian dalam buku-buku tersebut sudah sangat baik, karena berupaya mengarahkan siswa menalar dan membuat kesimpulan dari ilustrasi kasus per kasus yang mudah dipahami sesuai usia siswa SMP sederajat. Namun, dalam ilmu matematika proses pengerjaan kasus per kasus seperti yang disajikan dalam buku teks di atas tidak dapat digunakan sebagai hasil pembuktian yang dapat di generalisasi, sehingga belum bisa dipastikan dapat berlaku secara umum (Stavrou, 2014; C. K. Sari et al., 2017). Selain itu, hal ini juga tidak membuat siswa untuk berpikir kritis karena terkesan hanya menerima penjelasan atau instruksi hingga diperoleh simpulan berupa rumus yang siap digunakan (Fahlevi, 2023).

Berdasarkan **Gambar 1**(a), tampak bahwa buku teks Matematika pada Kurikulum KTSP mengarahkan siswa melalui ilustrasi terlebih dahulu. Ilustrasi memuat tentang sketsa koordinat Cartesius yang dilengkapi dengan berbagai posisi garis lurus yang melewati titik-titik koordinat tertentu. Adapun **Gambar 1**(b) menunjukkan proses penemuan konsep gradien pada dua garis yang saling tegak lurus tanpa melibatkan siswa untuk membuktikan. Siswa cukup melakukan pengamatan dan memahami penjelasan yang telah disajikan dalam buku. Bahkan simpulan akhir mengenai konsep hasil kali gradien dua garis yang saling tegak lurus adalah -1 merupakan simpulan yang langsung diberikan oleh penulis buku.

Berikutnya, **Gambar 2**(a), nampak bahwa buku teks Matematika pada Kurikulum 2013 mengarahkan siswa melalui aktivitas menalar. Aktivitas menalar disajikan dengan soal-soal (kasus per kasus), meskipun ada beberapa kegiatan belajar sebelumnya telah disajikan, namun aktivitas untuk memahami konsep gradien dua garis yang saling tegak lurus juga melalui kasus per kasus. Sedangkan dalam buku guru, sesuai **Gambar 2**(b), nampak bahwa guru juga langsung diberikan arahan untuk menyatakan bahwa konsep hasil kali gradien dua garis tegak lurus adalah -1, dan tidak nampak ada arahan agar guru dapat menggunakan alternatif pembuktian mengenai hasil perkalian gradien dua garis yang saling tegak lurus tersebut. Belum maksimalnya kesempatan bagi siswa untuk menalar dan membuktikan melalui buku Kurikulum 2013 juga telah diteliti sebelumnya (Utari & Hartono, 2019).

Terakhir **Gambar 3**(a), nampak bahwa buku teks Matematika pada Kurikulum Merdeka mengarahkan siswa melalui aktivitas pengerjaan soal (kasus per kasus). Namun soal yang diberikan tampak sebagai latihan rutin dan bukan untuk menuntun menemukan konsep gradien dua garis yang sejajar. Bahkan, ditampilan buku siswa sudah ditunjukkan informasi tambahan bahwa dua garis sejajar akan memiliki gradien yang sama. **Gambar 3**(b) yang merupakan isi buku guru memuat informasi kunci jawaban soal-soal yang disajikan dalam buku siswa, tampak tidak ada penjelasan khusus atau aktivitas untuk membuktikan konsep gradien dua garis saling sejejar. Berdasarkan hasil pengamatan yang dilakukan, dalam buku Kurikulum Merdeka belum nampak penjelasan tentang hasil kali gradien dua garis yang saling tegak lurus.

Berdasarkan Capaian Pembelajaran (CP) dan Acuan Tujuan Pembelajaran (ATP)pada kurikulum Merdeka. Materi tentang gradien masuk pada kelompok Aljabar dan diajarkan pada siswa yang berada di Fase D (kelas 7 hingga kelas 9) (RI, 2023). Tujuan Pembelajaran memuat pernyataan agar siswa dapat memahami pengertian gradien, menentukan gradien dan hubungan gradien antara dua garis, hingga mampu menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan gradien. Meskipun Tujuan Pembelajaran yang ada tidak menekankan tentang perlunya memahami pembuktian hubungan gradien pada dua garis, namun banyak hasil penelitian menyepakati bahwa pembuktian matematika harus selalu didukung bagi siswa di jenjang apapun. Kemampuan membuktikan perlu diperoleh dan dimiliki siswa serta harus menjadi komponen penting dalam pembelajaran matematika (Noto et al., 2019).

Dari paparan sebelumnya didapat bahwa upaya untuk menanamkan konsep gradien dari hubungan dua buah garis melalui pembuktian matematis dirasa belum optimal. Padahal siswa memiliki kesempatan untuk membuktikan konsep tersebut dengan beberapa informasi tambahan atau aktivitas kreatif yang dapat disajikan guru tanpa harus mengandalkan contoh kasus per kasus. Dalam pembelajaran matematika, jika siswa hanya disajikan rumus tanpa dasar konsep yang matang dapat memberi dampak buruk bagi budaya belajar matematika, karena hal tersebut secara nyata dapat mendorong siswa pada budaya non-konstruktif, siswa tidak akan memiliki waktu luang serta kesempatan untuk belajar (Fahlevi, 2023).

Lebih lanjut, siswa bahkan dapat kehilangan kemampuan untuk berpikir kreatif, rasional, dan analitis, yang akan menghambat kemampuan mereka untuk mencapai tujuan belajar matematika. Keadaan seperti ini dapat dihindari jika siswa memahami prinsip-prinsip dasar rumus yang dimaksud dan mengetahui persyaratan yang harus dipenuhi agar rumus tersebut dapat diterapkan (Fahlevi, 2020). Para guru di sekolah dapat membantu siswanya dalam memperoleh pemahaman ini. Guru dapat melakukan diskusi mendalam dengan siswa tentang situasi tertentu dalam suatu persoalan, kemudian meminta siswa memberikan argumen mereka sendiri, yang secara terus-menerus diarahkan untuk sampai pada pemahaman konsep yang diinginkan (Fahlevi, 2023), termasuk salah satunya tentang konsep gradien pada dua garis.

Berdasarkan uraian di atas, penelitian ini berupaya untuk berkontribusi memberikan bukti-bukti matematis mengenai konsep gradien pada dua garis agar dapat menjadi referensi bagi para guru. Adapun konsep yang akan dibuktikan terbatas pada topik gradien dua garis yang saling tegak lurus. Pembuktian dalam penelitian ini dijelaskan dari berbagai sudut pandang menggunakan materi yang masih dalam ruang lingkup matematika sekolah (bahkan dari matematika sekolah dasar hingga sekolah menengah), seperti ilustrasi rotasi garis sederhana, konsep perbandingan dan kesebangunan, teorema Pythagoras pada segitiga siku-siku yang ada dalam koordinat Cartesius, konsep Trigonometri “tan”, hingga konsep perkalian dot dua vektor.

Ragam pembuktian dalam penelitian ini diharapkan menjadi referensi yang relevan dengan kebutuhan pengajaran matematika saat ini. Melalui pemamaham pembuktian-pembuktian yang ada, guru dapat menambah wawasannya dalam mengolah bahan ajar. Sajian pembuktian rumus yang telah dibuktikan dapat disajikan sebagai salah satu bahan ajar untuk mengasah kemampuan bernalar dan kemampuan pembuktian matematis yang lebih baik. Kemampuan pembuktian matematis merupakan bagian dari kemampuan penalaran matematis, dan menjadi salah satu kemampuan penting dalam pembelajaran matematika (Herizal, 2020). Hal ini sesuai dengan tujuan pembelajaran matematika di Indonesia, yaitu untuk meningkatkan kemampuan tersebut karena berguna untuk melatih kemampuan berpikir matematis tingkat tinggi (Herizal et al., 2020).

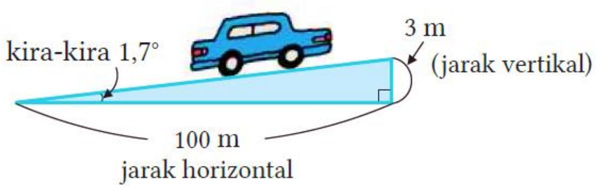
Perbedaan penelitian ini ada pada beberapa hal. Pertama, pada fokus pembahasan yang menguraikan pembuktian konsep gradien pada dua garis yang saling tegak lurus melalui berbagai sudut pandang matematika sekolah, mulai dari matematika sekolah dasar hingga sekolah menengah. Kedua, pendekatan yang digunakan dapat mendukung guru untuk memperluas wawasan dalam mengolah bahan ajar. Di sisi lain, upaya pembuktian konsep juga dilakukan melalui beragam materi matematika sekolah yang peneliti anggap telah jarang dilakukan oleh peneliti lainnya saat ini. Tujuan utama penelitian ini adalah memberikan bukti matematis yang dapat menjadi referensi bagi para guru dalam mengajarkan konsep gradien pada dua garis, seiring dengan upaya untuk meningkatkan kemampuan berpikir matematis tingkat tinggi siswa.

KAJIAN TEORI

Gradien suatu garis sering kali dikonseptualisasikan sebagai ukuran kecuraman garis tersebut. Secara informal, guru sering kali memperkenalkan gagasan gradien menggunakan situasi dunia nyata seperti lereng gunung atau kemiringan suatu bidang (Zaslavsky, 2010). Namun, kebanyakan buku teks biasanya mendefinisikan “gradien atau kemiringan suatu garis sebagai rasio kenaikan vertikal terhadap pergerakan horizontal, yakni ketika Anda berpindah dari satu titik ke titik lainnya di sepanjang garis” (S. Stump, 1999). Perspektif gradien secara geometris ini biasanya merupakan salah satu konseptualisasi gradien pertama yang diperkenalkan kepada siswa, bersamaan dengan interpretasi gradien yang lebih bersifat fisik sebagai kecuraman fisik suatu garis. Pada tingkat lebih lanjut, kemiringan dapat dikaitkan dengan parameter m dalam bentuk fungsi linier $y = mx + b$. Pandangan parametrik tentang gradien ini berbeda dengan perspektif geometris tentang gradien suatu garis karena konseptualisasi parametrik menyiratkan bahwa gradien adalah sifat invarian suatu garis terlepas dari skala di mana grafik fungsi tersebut digambar (Zaslavsky et al., 2002). Selain konseptualisasi gradien ini, gradien dapat diinterpretasikan dalam bentuk sudut antara grafik dan sumbu (Zaslavsky et al., 2002), dan sebagai laju perubahan antar variabel, dan sebagai batas dalam kasus garis singgung ke sebuah titik pada kurva (S. L. Stump, 2001)(S. L. Stump, 2001). Oleh karena itu, ada banyak cara untuk memahami gradien, setidaknya terdapat 11 konseptualisasi tentang gradien (Moore-Russo et al., 2011), namun dalam artikel ini hanya akan digunakan tiga konsep tentang gradien. Konsep-konsep gradien tersebut adalah:

Konsep 1

Gradien merupakan rasio geometris, yakni rasio dari $\frac{rise}{run}$ atau perpindahan secara vertikal (tegak) terhadap perpindahan secara horizontal (mendatar) (Zaslavsky, 2010; Aisyah et al., 2021):



Sumber: Tosho (2021b)

Gambar 4. Konsep gradien dalam suatu ilustrasi

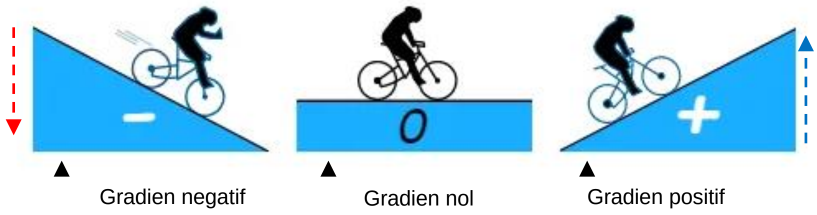
Kemiringan suatu bidang miring dapat ditentukan dengan:

$$\frac{rise}{run} = \frac{jarak\ vertikal}{jarak\ horizontal} \quad (1)$$

Sehingga berdasarkan Gambar 4. maka kemiringan bidang yang dilintasi oleh mobil adalah :

$$\frac{jarak\ vertikal}{jarak\ horizontal} = \frac{3}{100} \quad (2)$$

Secara serupa, kemiringan dari sebuah grafik fungsi linear $y = mx + c$ bergantung pada tingkat perubahan m. Untuk alasan ini, m disebut kemiringan atau gradien dari grafik fungsi linear. Dalam konsep gradien, makna perpindahan horizontal harus dimulai dari sisi kiri ke kanan sedangkan perpindahan vertikal bergantung pada kondisi garis atau bidang yang disajikan (Team, 2003). Perbedaan perpindahan secara vertikal inilah yang mengakibatkan ada gradien positif dan negatif.



Sumber: Pierce (2022)

Gambar 5. Ilustrasi jenis-jenis gradien

Konsep 2

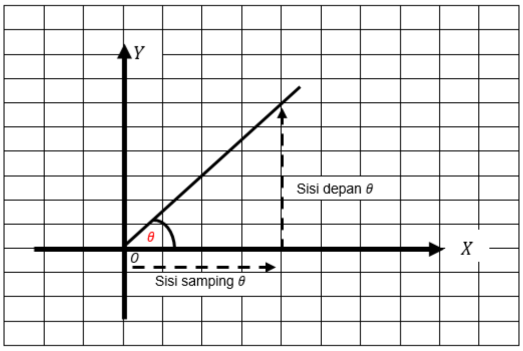
Gradien merupakan rasio aljabar, sebagai rasio $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ atau perubahan y terhadap perubahan x. Jika sebuah garis k melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$, maka garis k mempunyai gradien sebagai berikut (Nuharini & Wahyuni, 2008; As'ari, Tohir, Valentino, Imron, et al., 2017b):

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (3)$$

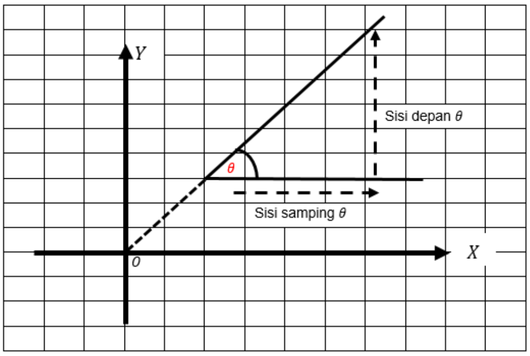
Konsep 2 merupakan salah satu konsep yang paling sering dijelaskan dalam buku teks sekolah (Nuharini & Wahyuni, 2008; As'ari et al., 2017b), sehingga konsep ini tidak akan dijelaskan lebih lanjut.

Konsep 3

Konsepsi trigonometri, dalam bentuk $tangen$ (tan) dari sudut inklinasi (yaitu sudut yang dibentuk garis terhadap sumbu X) (Moore-Russo et al., 2011). Pandang bahwa ***Konsep 1*** dapat diilustrasikan dalam koordinat Cartesius sebagai berikut:



(a)



(b)

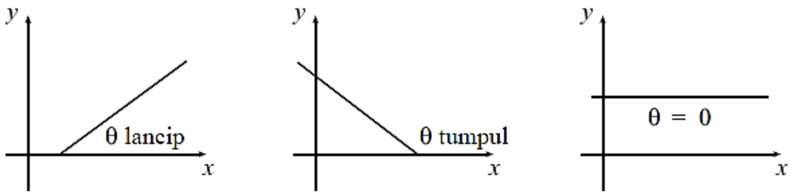
Sumber: adosi dari Team (2009)

Gambar 6. Sudut θ sebagai sudut inklanasi

Berdasarkan **Gambar 6**(a) nampak bahwa terbentuk suatu sudut θ antara garis dengan sumbu X. Bahkan, sudut yang akan terbentuk adalah tetap sebesar θ jika garis tersebut berpotongan dengan geras horizontal lainnya seperti **Gambar 6**(b). Lebih lanjut θ disebut sudut inklanasi. Berdasarkan ***Konsep 1*** bahwa gradien adalah rasio dari $\frac{rise}{run}$ merupakan perbandingan yang sama dengan konsep trigonometri tan, yaitu:

$$tan\ tan\ \theta\ = \frac{opposite}{adjacent} = \frac{sisi\ depan\ \theta}{sisi\ samping\ \theta} \quad (4)$$

terdapat beberapa hal yang harus diperhatikan dalam memahami ***Konsep 3***, terutama jika nilai gradien negatif. Lebih lanjut, perhatikan ilustrasi berikut:



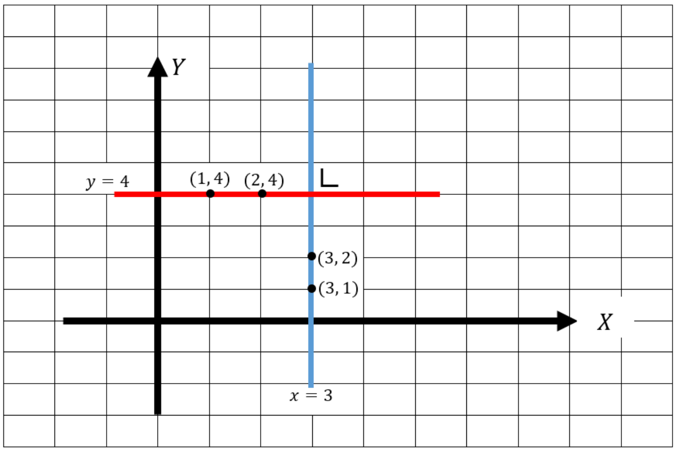
Sumber: adopsi dari Team (2009)

Gambar 7. Ragam sudut inklanasi dalam konteks gradien

Perhatikan bahwa ketika θ adalah sudut lancip maka nilai $tan\, tan\, \theta$ positif, hal ini disebabkan oleh jenis perubahan yang terjadi, yakni nilai y bertambah seiring bertambahnya x sehingga perubahan pada y dan perubahan pada x keduanya positif, berakibat pada gradiennya bernilai positif. Selanjutnya, ketika θ adalah sudut tumpul maka nilai $tan\, tan\, \theta$ negatif, hal ini juga disebabkan oleh jenis perubahan yang terjadi, yakni nilai y berkurang ketika nilai x bertambah sehingga perubahan pada y dan perubahan pada x tidak sama, berakibat pada gradiennya bernilai negatif.

Selain 3 konsep tentang gradien yang dipaparkan sebelumnya, berikutnya akan ditunjukkan hubungan gradien antara dua garis. Umumnya pembahasan mengenai hal ini mengacu pada dua jenis hubungan, yakni dua garis saling sejajar dan dua garis saling tegak lurus (Nuharini & Wahyuni, 2008; As'ari, Tohir, Valentino, Imron, et al., 2017b)(As'ari et al., 2017b). Dua garis sejajar akan memiliki nilai gradien yang sama, adapun dua garis yang berpotongan tegak lurus akan memiliki hasil kali gradien -1 (Aisyah et al., 2021). Pada kasus-kasus tertentu akan didapati beberapa persamaan garis dengan gradien yang unik, hal ini yang perlu dicermati oleh para guru dan perlu dijelaskan secara mendalam kepada siswa bahwa pada konsep umum yang diperkenalkan dalam buku teks bisa saja tidak berlaku pada kasus-kasus tertentu.

Menggunakan ***Konsep 2***, akan ditunjukkan bahwa gradien dua garis dalam bentuk $y = k$ dan $x = k$ dengan k adalah suatu konstanta, merupakan dua garis yang saling berpotongan tegak lurus, namun hasil perkalian gradiennya bukan -1. Sebagai contoh garis $y = 4$ dan $x = 3$ yang diilustrasikan dalam koordinat Cartesius berikut:



Sumber: dokumen pribadi

Gambar 8. Garis $y = 4$ dan $x = 3$ dalam koordinat Cartesius

Pandang bahwa garis $y = 4$ melewati titik koordinat $(1, 4)$ dan $(2, 4)$, artinya $x_1 = 1, y_1 = 4$ dan $x_2 = 2$ dan $y_2 = 4$ sehingga berdasarkan ***Konsep 2*** gradien garis $y = 4$ adalah:

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 4}{2 - 1} = \frac{0}{1} = 0 \quad (5)$$

Adapun garis $x = 4$ melewati titik koordinat $(3, 1)$ dan $(3, 2)$, sehingga $x_1 = 3, y_1 = 1$ dan $x_2 = 3$ dan $y_2 = 2$ hal ini berarti gradien garis $x = 4$ adalah:

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-1}{3-3} = \frac{1}{0} = tidak\ dapat\ didefinisikan \tag{6}$$

Berdasarkan (5) dan (6) maka perkalian kedua garis yang saling tegak lurus tersebut adalah:

$$m_1 \times m_2 = 0 \times tidak\ dapat\ didefinisikan = tidak\ dapat\ didefinisikan \qquad \blacksquare$$

METODE PENELITIAN

Artikel ini menggunakan pendekatan penelitian kepustakaan yang mengacu pada studi literatur (*library research*). Penelitian kepustakaan ini termasuk dalam metode kualitatif yang membutuhkan analisis deskriptif (Darmalaksana, 2020). Dalam penelitian kepustakaan, teknik analisis data yang digunakan adalah metode analisis isi, yang diterapkan secara sistematis pada catatan atau dokumen sebagai sumber data untuk memastikan keabsahan aturan, dokumen kebijakan, dan temuan penelitian (Hardani et al., 2020). Instrumen yang digunakan dalam penelitian ini mencakup daftar kategori penelitian, rencana penulisan, dan struktur catatan penelitian (Awalina & Purwoko, 2018).

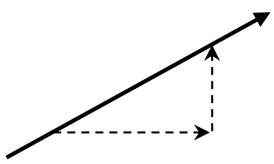
Kepustakaan dalam *library research* bersumber dari buku, artikel ilmiah, dan literatur-literatur relevan lainnya yang dijadikan sebagai sumber ide untuk membangkitkan gagasan atau pemikiran lain tanpa harus melakukan riset lapangan (M. Sari & Asmendri, 2020). Dalam penelitian kepustakaan ini, kepustakaan utama meliputi buku, artikel, berbagai video *open source* yang membahas pembuktian dengan cara yang shahih dalam memaparkan pembuktian hasil kali gradien dua garis yang saling tegak lurus, serta ragam materi lainnya yang dapat digunakan menjadi kerangka dasar pembuktian. Pembuktian dalam artikel ini dibagi berdasarkan cakupan materi geometri yang diajarkan dalam matematika sekolah yang meliputi: (1) rotasi garis, (2) konsep perbandingan dan kesebangunan, (3) teorema Pythagoras, (4) konsep $tangen\ (tan)$ dalam Trigonometri, serta (5) konsep perkalian dot dua vektor.

Metode penelitian kepustakaan yang digunakan dalam penelitian ini melibatkan beragam sumber, di mana mayoritasnya berasal dari video-video pembuktian yang diperoleh dari tiga channel YouTube yang berbeda. Selain itu, kutipan hasil diskusi dari situs diskusi ilmiah juga menjadi salah satu sumber informasi yang digunakan. Peneliti juga melakukan pembuktian sendiri sebagai bagian dari metodologi penelitian. Meskipun demikian, terdapat sejumlah kepustakaan pendukung yang menjadi dasar penelitian, antara lain karya Zaslavsky et al., (2002), Sibgatullin et al., (2022), dan Fahlevi (2023). Kepustakaan ini memberikan landasan teoritis yang kuat dan mendukung dalam pembuktian konsep gradien pada dua garis yang saling tegak lurus dalam konteks penelitian ini.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Strategi 1. Rotasi Sederhana pada Suatu Garis

Diberikan suatu garis l_1 dengan gradien m_1. Andai garis l_1 memiliki ketinggian a (berdasarkan ***Konsep 1***, ketinggian adalah jarak dari bawah ke atas) dan jarak horizontal b (jarak horizontal dimulai dari kiri ke kanan) sedemikian hingga dapat diilustrasikan sebagai berikut:



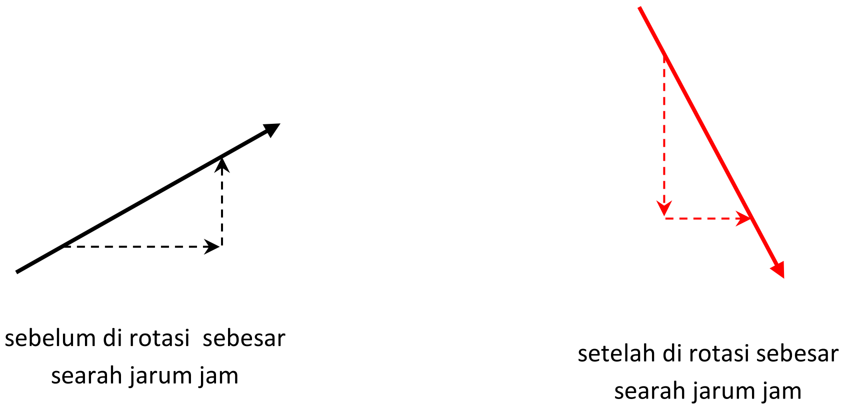
Sumber: adopsi dari Math&music (2018)

Gambar 9. Ilustrasi garis l_1

lebih lanjut berdasarkan ***Konsep 1***, maka gradien (m_1) dari garis l_1 adalah:

$$m_1 = \frac{a}{b} \tag{7}$$

Selanjutnya garis l_1 dirotasikan sejauh 90^o searah jarum jam, agar terbentuk dua garis yang saling tegak lurus. Garis hasil rotasi ini dinotasikan sebagai l_2 dan diberi warna merah untuk memudahkan perbedaan posisi antara kedua garis. Lebih lanjut perhatikan ilustrasi pada gambar berikut:



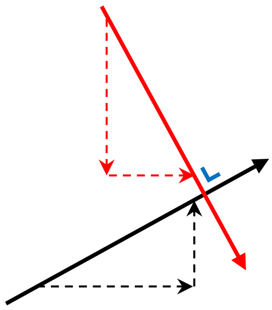
Sumber: adopsi dari Math&music (2018)

Gambar 10. Ilustrasi rotasi garis l_1 menjadi garis l_2

perhatikan bahwa terdapat beberapa perubahan yang dihasilkan rotasi tersebut. Pertama, ketinggian dan jarak horizontal pada garis l_1 posisinya tertukar pada garis l_2 sehingga jarak horizontal garis l_2 adalah a dan ketinggian garis l_2 adalah b. Kedua, perhatikan bahwa ketinggian garis l_2 dimulai dari atas ke bawah, sehingga notasinya dituliskan sebagai $-b$. Sesuai ***Konsep 1***, adapun kemiringan garis setelah di rotasi (m_2) adalah:

$$m_2 = \frac{-b}{a} \tag{8}$$

Hubungan antara garis l_1 dan l_2 adalah saling tegak lurus (akibat dari rotasi 90^o) yang diilustrasikan dalam gambar sebagai berikut:



Sumber: adopsi dari Math&music (2018)

Gambar 11. Ilustrasi Hubungan antara garis l_1 dan l_2

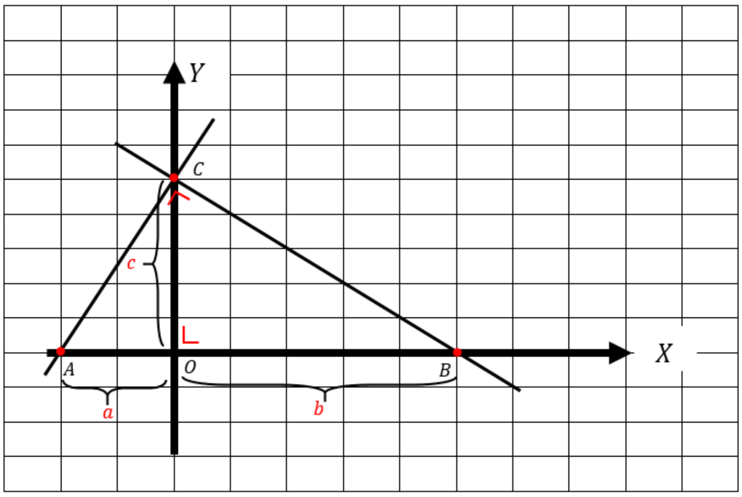
selanjutnya akan ditentukan hasil perkalian dua gradien antara garis l_1 dengan garis l_2, yakni:

$$m_1 \times m_2 = \frac{a}{b} \times \frac{-b}{a} = \frac{-ab}{ab} = -1 \qquad \blacksquare$$

Strategi 1. yang telah dipaparkan, peneliti anggap dapat disampaikan dan dipahami oleh siswa di Sekolah Dasar, karena materi prasyarat yang ada dalam strategi ini hanya memerlukan pemahaman tentang rotasi garis sederhana dan arah garis. Siswa di Sekolah Dasar belum diperkenalkan istilah variabel, konstanta, atau parameter maka strategi ini dapat digunakan dengan memilih sebarang bilangan untuk a dan b, baik itu bilangan bulat maupun bilangan rasional sehingga dapat dilakukan operasi aritmetika dasar dalam melakukan proses pembuktian. Tidak ada keharusan untuk menyampaikan ini di tingkat Sekolah Dasar, namun bisa menjadi pengantar pembuktian informal bagi siswa Sekolah Dasar. Strategi ini juga dapat disampaikan kepada siswa di jenjang yang lebih tinggi.

Strategi 2. Konsep Perbandingan dan Kesebangunan

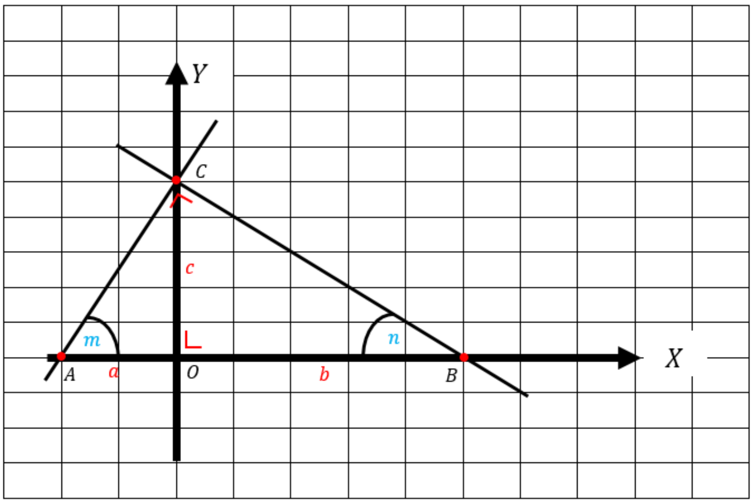
Diberikan segitiga siku-siku ABC, siku-siku di C dalam koordinat Cartesius sebagai berikut.



Sumber: adopsi dari Indrajana (2020)

Gambar 12. Segitiga siku-siku ABC dalam koordinat Cartesius

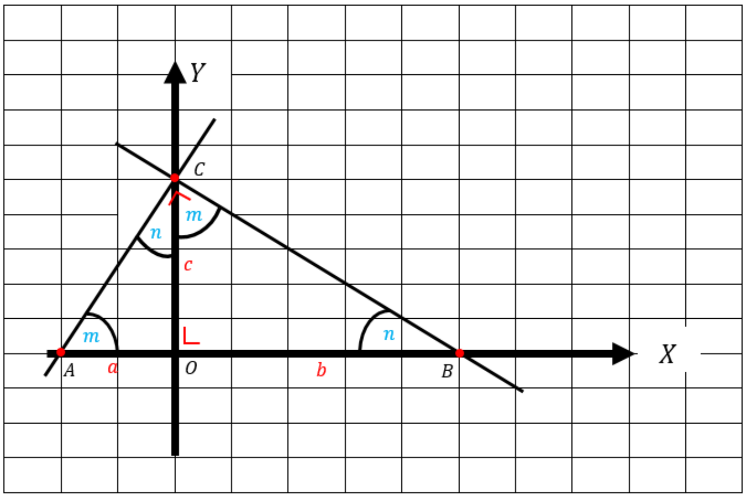
perhatikan bahwa $AO = a, OB = b$, dan $OC = c$. Selanjutnya perhatikan juga bahwa segitiga ABC memuat dua segitiga siku-siku lainnya, yaitu segitiga AOB dan segitiga COB. Dari informasi tersebut di atas akan ditentukan juga sudut-sudut pada segitiga ABC, dimisalkan $\angle CAO = m$ dan $\angle OBC = n$ sebagai berikut.



Sumber: adopsi dari Indrajana (2020)

Gambar 13. Permisalan panjang sisi dan besar sudut dalam segitiga siku-siku ABC

perhatikan bahwa segitiga ABC siku-siku di C, ini berarti $\angle BCA = 90^o$ sehingga $\angle m + \angle n = 90^o$. Mengakibatkan $\angle m$ dan $\angle n$ sudut berpenyiku. Akibatnya, $\angle OCA = \angle n$ dan $\angle BCO = \angle m$. Lebih lanjut perhatikan gambar berikut.



Sumber: adopsi dari Indrajana (2020)

Gambar 14. Besar sudut dalam segitiga siku-siku ABC

karena sudut-sudut yang bersesuaian pada segitiga AOC dan COB sama besar, maka kedua segitiga tersebut adalah segitiga yang sebangun. Sehingga perbandingan sisi-sisi segitiga AOC dan OBC pada sudut yang bersesuaian dapat dilakukan. Perhatikan bahwa:

$$\frac{sisi\ depan\ \angle m_{AOC}}{sisi\ samping\ \angle m_{AOC}} = \frac{sisi\ depan\ \angle m_{OBC}}{sisi\ samping\ \angle m_{OBC}} \Leftrightarrow \frac{OC}{AO} = \frac{OB}{AC} \quad (9)$$

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow c^2 = ab \quad (10)$$

Selanjutnya, perhatikan bahwa garis AC melewati sepasang titik koordinat, yaitu $(-a, 0)$ dan $(0, c)$ atau dengan kata lain $x_1 = -a, y_1 = 0$ dan $x_2 = 0$ dan $y_2 = c$, sehingga gradien garis AC dapat ditentukan sebagai berikut:

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{c - 0}{0 - (-a)} = \frac{c}{0 + a} = \frac{c}{a} \quad (11)$$

kemudian garis BC juga melewati sepasang titik koordinat, yaitu $(b, 0)$ dan $(0, c)$ atau dengan kata lain $x_1 = b, y_1 = 0$ dan $x_2 = 0$ dan $y_2 = c$, sehingga gradien garis BC adalah:

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{c - 0}{0 - b} = \frac{c}{-b} \quad (12)$$

Berdasarkan (11) dan (12), naka perkalian kedua garis yang saling tegak lurus tersebut adalah:

$$m_1 \times m_2 = \frac{c}{a} \times \frac{c}{-b} = \frac{c^2}{-ab} \quad (13)$$

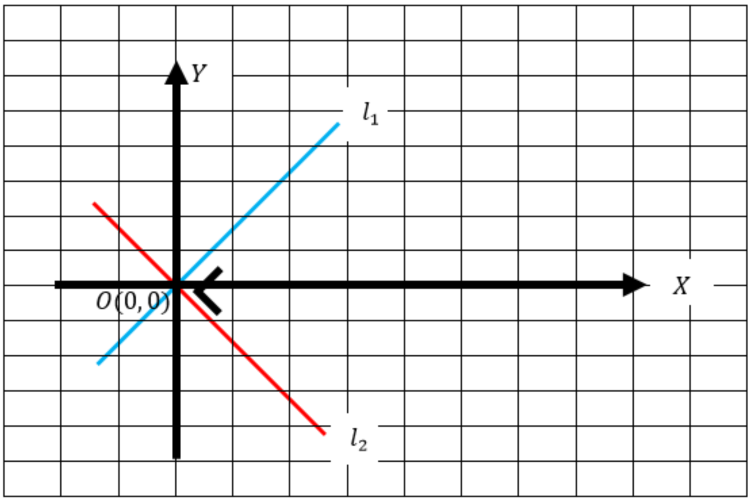
Berdasarkan (10) maka dapat dibuktikan bahwa:

$$m_1 \times m_2 = \frac{c^2}{-ab} = \frac{ab}{-ab} = -1 \quad \blacksquare$$

Pembuktian dalam **Strategi 2.** ini dapat disampaikan untuk siswa di SMP, konsep-konsep yang digunakan dalam strategi ini cukup lazim dan ada di buku teks matematika SMP.

Strategi 3. Teorema Pythagoras pada Segitiga Siku-siku dalam Koordinat Cartesius

Jika diberikan dua garis $(l_1\ dan\ l_2)$ yang saling tegak lurus dan digambarkan pada suatu koordinat Kartesius, serta tanpa mengurangi sifat umum (*without loss of generality*) kedua garis tersebut melalui titik Origin $O(0, 0)$ sedemikian sehingga dapat diilustrasikan dalam gambar berikut:



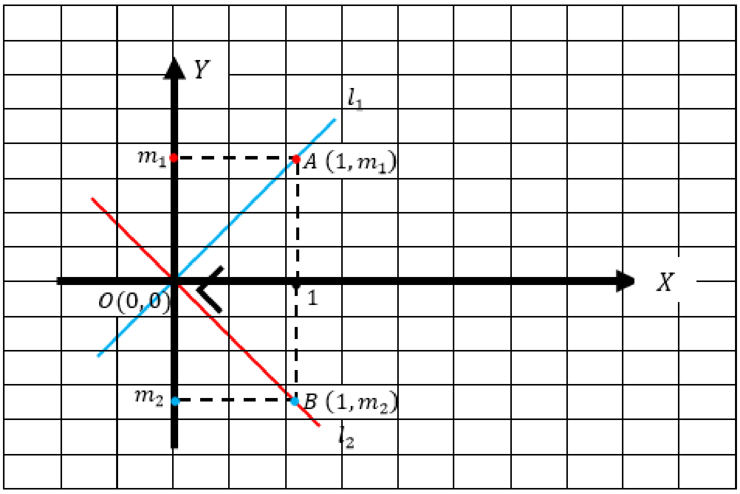
Sumber: adopsi dari MaThCliX® (2015)

Gambar 15. Ilustrasi dua garis l_1 dan l_2 dalam koordinat Cartesius

adapun persamaan umum yang dapat dituliskan dari kedua garis tersebut adalah sebagai berikut:

$$l_1 \equiv y = m_1 x \text{ dan } l_2 \equiv y = m_2 x \tag{14}$$

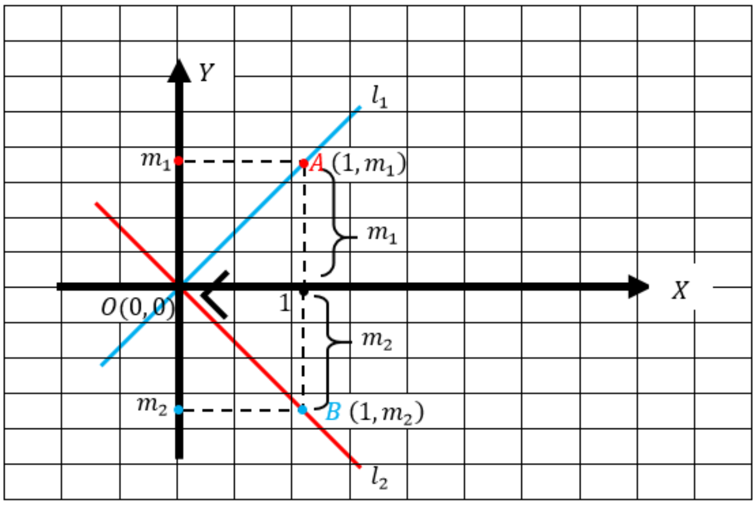
dengan m_1 bernilai positif sebagai gradien garis l_1 dan m_2 bernilai negatif sebagai gradien garis l_2, serta kedua garis berpotongan tegak lurus di titik $O(0,0)$. Berikutnya, pilih absis $x = 1$ yang akan di *plotting* pada kedua garis. Misal titik A pada garis l_1 dan titik B pada garis l_2 sehingga koordinat titik A adalah $(1, m_1)$ dan titik B adalah $(1, m_2)$. Informasi ini lebih lanjut diilustrasikan dalam gambar berikut:



Sumber: adopsi dari MaThCliX® (2015)

Gambar 16. Ilustrasi garis $l_1 \equiv m_1 x$ dan $l_2 \equiv m_2 x$

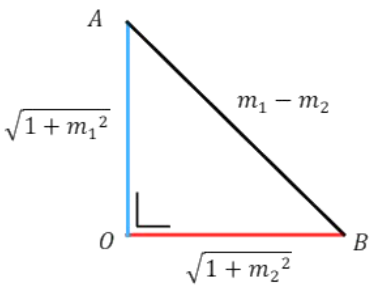
ide dalam pembuktian ini akan melibatkan segitiga yang dibentuk oleh garis l_1 dan l_2, yaitu ΔAOB sehingga perlu ditentukan panjang tiap sisi segitiga tersebut sebagai berikut:



Sumber: adopsi dari MaThCliX® (2015)

Gambar 17. Ilustrasi segitiga AOB yang dikontruksi dari garis l_1 dan l_2

perhatikan panjang sisi AO dan sisi BO yang dapat ditentukan dengan teorema Pythagoras, yaitu $AO^2 = 1^2 + {m_1}^2$ sehingga didapat $AO = \sqrt{1 + {m_1}^2}$ kemudian $BO^2 = 1^2 + {m_2}^2$ sehingga didapat panjang $BO = \sqrt{1 + {m_2}^2}$. Selanjutnya panjang AB, perhatikan bahwa jarak m_2 bernilai negatif, sehingga konsep panjang AB sebagai jumlah jarak m_1 dan m_2 dituliskan sebagai $AB = m_1 - m_2$. Untuk membuktikan hasil kali gradien kedua garis $(l_1\ dan\ l_2)$ yang saling tegak lurus adalah -1, maka akan dibuktikan bahwa hasil kali $m_1\ dan\ m_2\ adalah\ -1$. Perhatikan bahwa seluruh sisi $\Delta\, AOB$ telah ditentukan, berikutnya akan digambar ulang $\Delta\, AOB$ di luar koordinat Cartesius sebagai berikut:



Sumber: adopsi dari MaThCliX® (2015)

Gambar 18. Ilustrasi segitiga AOB di luar koordinat Cartesius

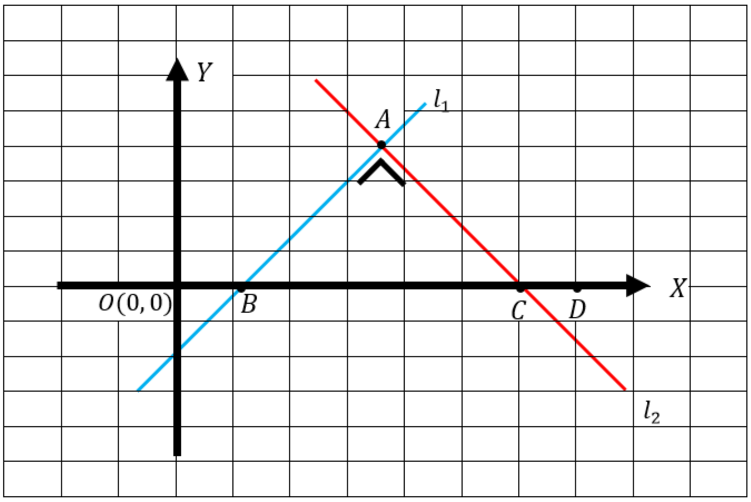
Perhatikan bahwa $\Delta\, AOB$ adalah segitiga siku-siku, dengan menggunakan teorema Pythagoras maka berlaku kesamaan dua sisi berikut:

$$
\begin{aligned}
(m_1 - m_2)^2 &= \left(\sqrt{1 + {m_1}^2}\right)^2 + \left(\sqrt{1 + {m_2}^2}\right)^2 \\
{m_1}^2 - 2m_1m_2 + {m_2}^2 &= 1 + {m_1}^2 + 1 + {m_2}^2 \\
{m_1}^2 - 2m_1m_2 + {m_2}^2 &= {m_1}^2 + {m_2}^2 + 2 \\
-2m_1m_2 &= {m_1}^2 + {m_2}^2 + 2 - {m_1}^2 - {m_2}^2 \\
-2m_1m_2 &= 2 \\
m_1m_2 &= \frac{2}{-2} \\
m_1m_2 &= -1 \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Sama halnya dengan pembuktian **Strategi 2.**, pembuktian pada **Strategi 3.** ini dapat disampaikan untuk siswa di SMP, konsep-konsep yang digunakan dalam strategi ini telah disampaikan dalam buku teks matematika SMP (Fahlevi, 2021).

Strategi 4. Konsep Trigonometri $\tan\theta$ dalam Gradien

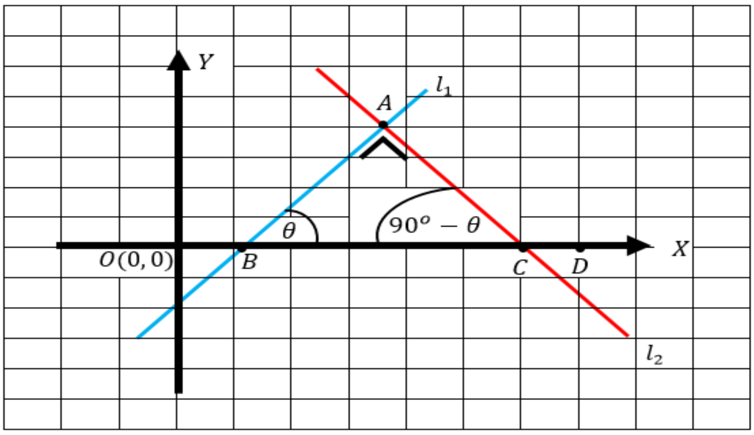
Jika diberikan dua garis saling tegak lurus (l_1 dan l_2) yang digambarkan pada suatu koordinat Cartesius. Andai kedua garis berpotongan di titik A, kemudian dua titik yang berpotongan dengan sumbu absis (sumbu X) adalah B dan C, serta terdapat satu titik lain di sumbu X yang dapat digambarkan sebagai berikut:



Sumber: dokumen pribadi

Gambar 19. Ilustrasi garis l_1 dan l_2 yang berpotongan di titik A dalam koordinat Cartesius

perhatikan bahwa $\angle CAB = 90^o$, sehingga terbentuk ΔABC siku-siku di titik A. Misalkan $\angle ABC = \theta$ sedemikian sehingga $\angle BCA = 90^o - \theta$ (karena jumlah kedua sudut ini 90^o) seperti ilustrasi berikut:



Sumber: dokumen pribadi

Gambar 20. Ilustrasi segitiga ABC siku-siku di titik A dan bersar sudut titik lainnya

Berdasarkan ***Konsep 3***, gradien garis l_1 atau garis AB adalah $m_{AB} = \tan\tan\angle ABC\ = \tan\tan\theta$. Adapun gradien garis l_2 atau garis AC adalah $m_{AC} = \tan\tan\angle ACD$. Lebih lanjut akan dibuktikan bahwa:

$$m_{AB} \times m_{AC} = \tan\tan\angle ABC\ \times \tan\tan\angle ACD\ = -1 \qquad (15)$$

Pertama akan ditentukan terlebih dahulu besaran $\angle ACD$. Pandang $\angle BCA$ dan $\angle ACD$ berpelurus, sehingga $\angle BCA + \angle ACD = 180^o$, sehingga:

$$\angle ACD = 180^o - \angle BCA$$
$$\angle ACD = 180^o - (90^o - \theta)$$
$$\angle ACD = 90^o + \theta \quad (16)$$

Selanjutnya menentukan nilai $tan\ tan\ \angle ACD$, lakukan operasi trigonometri tan pada kedua ruas, berdasarkan (16) didapat:

$$tan\ tan\ \angle ACD\ = tan\ tan\ (90^o + \theta) \quad (17)$$

berdasarkan sifat trigonometri bahwa $tan\ tan\ (90^o + \theta) = -\ cot\ cot\ \theta$ maka (17) dapat dituliskan:

$$tan\ tan\ \angle ACD = -\ cot\ cot\ (\angle ABC)$$
$$tan\ tan\ \angle ACD = -\frac{1}{tan\ tan\ \angle ABC} \quad (18)$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa hasil kali m_{AB} dan m_{AC} adalah -1. Perhatikan bahwa

$$m_{AB} \times m_{AC} = tan\ tan\ \angle ACD\ \times tan\ tan\ \angle ABC \quad (19)$$

berdasarkan (18) maka (19) dapat ditulis

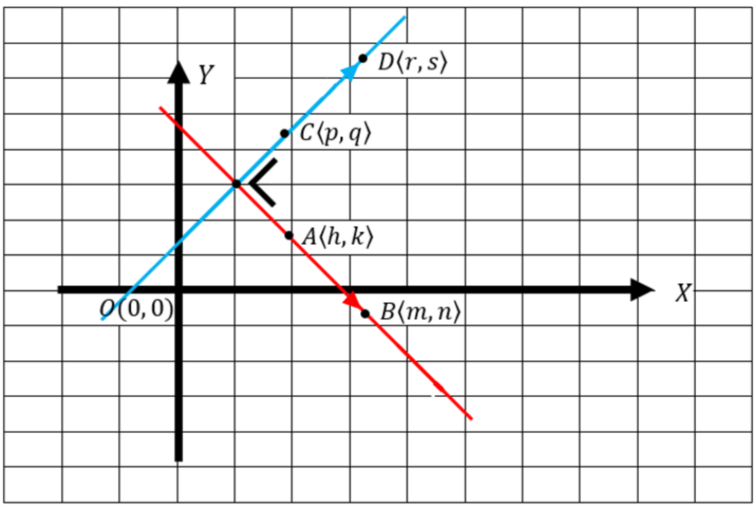
$$m_{AB} \times m_{AC} = -\frac{1}{tan\ tan\ \angle ABC} \times tan\ tan\ \angle ABC \quad (20)$$

atau dengan kata lain:

$$m_{AB} \times m_{AC} = -1 \quad \blacksquare$$

Pembuktian dalam **Strategi 4.** ini dapat disampaikan untuk siswa di SMA, karena konsep trigonometri baru dijumpai siswa di jenjang tersebut. Meski materi trigonometri cukup lazim dan ada di buku teks matematika SMA, namun konsep mendalam tentang trigonometri biasanya hanya disampaikan pada siswa pada jurusan Ilmu Alam (IPA/MIA).

Strategi 5. Konsep Hasil Perkalian Dot Dua Vektor
Diberikan dua vektor yang saling tegak lurus pada koordinat Cartesius sebagai berikut:



Sumber: adopsi dari Sagar (2022)

Gambar 21. Ilustrasi dua vektor dalam koordinat Cartesius

Untuk membuktikan bahwa hasil kali gradien dua garis yang saling tegak lurus adalah -1, ambil sebarang dua garis AB dan CD pada bidang xy (koordinat Carteius) yang saling tegak lurus yang selanjutnya akan ditentukan gradiennya. Misalkan sebarang titik pada garis AB adalah $A\langle h,k\rangle$ dan $B\langle m,n\rangle$. Selanjutnya asumsikan juga bahwa sebarang titik pada garis CD adalah $C\langle p,q\rangle$ dan $D\langle r,s\rangle$.

Lebih lanjut, berdasarkan ***Konsep 2*** maka gradien garis AB adalah:

$$m_1 = \frac{n-k}{m-h} \tag{21}$$

adapun gradien garis CD adalah:

$$m_2 = \frac{s-q}{r-p} \tag{22}$$

menggunakan metode perkalian dot pada vektor akan dibuktikan bahwa $m_1 \times m_2 = -1$. Perhatikan bahwa persamaan vektor $\overrightarrow{AB}$ dan vektor $\overrightarrow{CD}$ dapat ditentukan dengan cara menentukan selisih elemen-elemen pada titik yang melewati vektor-vektor tersebut sebagai berikut:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \langle m-h, n-k\rangle \ dan\ \overrightarrow{CD} = D - C = \langle r-p, s-q\rangle \tag{23}$$

karena $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{CD}$ adalah dua vektor yang saling tegak lurus maka hasil perkalian dot kedua vektor tersebut (secara Geometri) adalah nol, yaitu:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CD}\right| \cdot cos\ cos\ 90^o = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CD}\right| \cdot 0 = 0 \tag{24}$$

atau dengan kata lain:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \tag{25}$$

berdasarkan (23) maka (25) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\langle m-h, n-k\rangle \cdot \langle r-p, s-q\rangle = 0 \tag{26}$$

Sehingga hasil perkalian dot dua vektor tersebut (secara Aljabar) adalah:

$$(m-h)(r-p) + (n-k)(s-q) = 0 \tag{27}$$

hal ini berarti:

$$\begin{aligned}
(n-k)(s-q) &= -(m-h)(r-p) \\
\frac{(n-k)(s-q)}{(m-h)(r-p)} &= -1 \\
\frac{n-k}{m-h} \times \frac{s-q}{r-p} &= -1
\end{aligned} \tag{28}$$

berdasarkan (21) dan (22) maka (28) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$m_1 \times m_2 = -1 \qquad \blacksquare$$

Sama halnya dengan pembuktian dalam **Strategi 4.** Pembuktian dalam **Strategi 5** ini juga dapat disampaikan untuk siswa di SMA, karena konsep perkalian vektor baru dijumpai siswa di jenjang tersebut. Meski materi vektor ada di buku teks matematika SMA, materinya tidak disampaikan kepada semua siswa, materi vektor hanya ada di materi peminatan yang disampaikan pada siswa pada jurusan Ilmu Alam (IPA/MIA). Materi gradien di jenjang SMA kembali diulas pada saat pembahasan materi turunan fungsi pada topik gradien garis singgung, sehingga materi vektor dapat digunakan untuk menjelaskan pembuktian perkalian dua gradien.

SIMPULAN

Suatu konsep yang diterapkan untuk menyelesaikan soal-soal matematika, ternyata memiliki beragam informasi serta pendekatan dari berbagai materi-materi yang saling berhubungan. Begitu juga dengan pembuktian-pembuktian pada penelitian ini, konsep perkalian dua gradien garis yang saling tegak lurus cukup sering digunakan dalam pembelajaran matematika, baik materi di SMP hingga di SMA. Namun pembuktian yang lebih fundamental terkait konsep tersebut sering terlupa untuk disampaikan, dan ditunjukkan hanya melalui ilustrasi atau contoh soal kasus per kasus. Padahal konsep gradien ini dapat dibuktikan dengan pendekatan dari beragam materi matematika sekolah lainnya. Hasil penelitian menunjukkan bahwa terdapat strategi yang tepat bagi siswa di tiap jenjang pendidikan. Strategi 1 bagi siswa Sekolah Dasar, Strategi 2 dan Strategi 3 bagi siswa SMP, serta Strategi 4 dan Strategi 5 bagi siswa SMA. Penelitian ini dapat berimplikasi pada terbukanya sudut pandang mengenai pembuktian-pembuktian hasil kali gradien dua garis bagi guru, padahal materi-materi tersebut sudah ada dan telah diajarkan di kelas. Para guru dapat mengolah bahan ajarnya menjadi lebih baik dan dapat memberikan kesempatan siswa untuk melakukan aktivitas membuktikan. Melalui penelitian ini, peneliti berharap semakin banyak hadir penelitian-penelitian tentang analisis pembuktian rumus-rumus atau konsep matematika sekolah yang dapat membantu setiap guru dan para pendidik sebagai bahan referensi agar dapat digunakan untuk mendukung kemampuan berpikir kritis siswa.

REFERENCES

Aisyah, Putra, R. W. Y., & Ambarwati, R. (2021). *Ringkasan Materi, Soal, dan Pembahasan Gradien dan Persamaan Garis Lurus Berbasis HOTS* (Hermansyah (ed.)). Arjasa Pratama. http://repository.radenintan.ac.id/14386/

As'ari, A. R., Tohir, M., Valentino, E., Imron, Z., & Taufiq, I. (2017a). Matematika: Buku Guru. In A. Lukito & A. Mahmudi (Eds.), *Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan: Vol. Revisi* (Rev 2017). Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemendikbud.

As'ari, A. R., Tohir, M., Valentino, E., Imron, Z., & Taufiq, I. (2017b). *Matematika SMP/MTs Kelas VIII* (A. Lukito, A. Mahmudi, Turmudi, Y. Marpaung, Y. Satria, & Widowati (eds.); Rev 2017, Issue Revisi). Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemendikbud.

Awalina, W., & Purwoko, B. (2018). Studi Kepustakaan Penerapan Konseling Expressive Writing dalam Lingkup Pendidikan. *Jurnal BK UNESA*, *8*(2), 1–9.

Choy, B. H., Lee, M. Y., & Mizzi, A. (2020). Insights into the Teaching of Gradient from an Exploratory Study of Mathematics Textbooks from Germany, Singapore, and South Korea. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *15*(3), em0592. https://doi.org/10.29333/iejme/8273

Darmalaksana, W. (2020). Metode Penelitian Kualitatif Studi Pustaka dan Studi Lapangan. *Pre-Print Digital Library UIN Sunan Gunung Djati Bandung*, 1–6.

Fahlevi, M. R. (2020). Dibalik Kehebatan Cara Cepat Matematika. In A'i Mulyani Az Zahra (Ed.), *Ismaya Publishing* (1st ed.). Ismaya Publishing.

Fahlevi, M. R. (2021). Number Formation Strategies to Simplify Calculations in Pythagoras Theorem. *Idealmathedu: Indonesian Digital Journal of Mathematics and Education*, *8*(2), 55–68.

Fahlevi, M. R. (2023). Pembuktian Rumus Jarak Dalam Bangun Ruang Dimensi Tiga Ditinjau Dari Ruang Lingkup Geometri Matematika Sekolah. *HEXAGON: Jurnal Ilmu Dan Pendidikan Matematika*, *1*(2), 165–179. https://doi.org/10.33830/hexagon.v1i2.5266.Pembuktian

Farah, R. N., Zuraida, R. L., Ayub, A. F. M., Rejeki, S., Amarpreet, K., Muzirah, M., Nida, S. U., & Irwan, N. (2021). Algebraic Lab: Pedagogical Tool to Teach and Learn Algebra through Game. *Review of International Geographical Education Online*, *11*(4), 951–962. https://doi.org/10.33403/rigeo.8006809

Hardani, Hikmatul, A. N., Ardiani, H., Fardani, R. A., Ustiawaty, J., Utami, E. F., Sukmana, D. J., & Istiqomah, R. R. (2020). *Metode Penelitian Kualitatif & Kuantitatif* (H. Abadi (ed.); 1st ed., Issue April). CV. Pustaka Ilmu.

Herizal, H. (2020). Faktor yang Memengaruhi Kemampuan Pembuktian Matematis Siswa. *Vygotsky*, *2*(1), 33. https://doi.org/10.30736/vj.v2i1.187

Herizal, Suhendra, & Nurlaelah, E. (2020). Pengaruh kemampuan memahami bukti matematis terhadap kemampuan mengonstruksi bukti matematis pada topik trigonometri. *Suska Journal of Mathematics Education*, *6*(1), 17–24. http://ejournal.uin-suska.ac.id/index.php/SJME/article/view/8115

Indrajana, A. (2020). *Asal Mula Gradien Garis Sejajar dan Tegak Lurus*. www.youtube.com. https://www.youtube.com/watch?v=lCCmPYvJZds

Kamarullah, K. (2017). Pendidikan Matematika Di Sekolah Kita. *Al Khawarizmi: Jurnal Pendidikan Dan Pembelajaran Matematika*, *1*(1), 21–32. https://doi.org/10.22373/jppm.v1i1.1729

Lestari, D. E., & Suryadi, D. (2020). Analisis Kesulitan Operasi Hitung Bentuk Aljabar. *JURING (Journal* *for Research in Mathematics Learning)*, *3*(3), 247–258. https://doi.org/10.24014/juring.v3i3.9737

Malihatuddarojah, D., & Prahmana, R. C. I. (2019). Analisis Kesalahan Siswa Dalam Menyelesaikan Permasalahan Operasi Bentuk Aljabar. *Jurnal Pendidikan Matematika*, *13*(1), 1–8. https://doi.org/10.22342/jpm.13.1.6668.1-8

Math&music. (2018). *Gradient of Perpendicular Lines Proof*. www.youtube.com. https://www.youtube.com/watch?v=bLV8LLXTO7w

MaThCliX®. (2015). *Proof of Slopes of Perpendicular Lines*. www.youtube.com. https://www.youtube.com/watch?v=CC05mpGxEIQ

Moore-Russo, D., Conner, A. M., & Rugg, K. I. (2011). Can Slope be Negative in 3-Space? Studying Concept Image of Slope through Collective Definition Construction. *Educational Studies in Mathematics*, *76*(1), 3–21. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9277-y

Noto, M. S., Priatna, N., & Dahlan, J. A. (2019). Mathematical proof: The learning obstacles of pre-service mathematics teachers on transformation geometry. *Journal on Mathematics Education*, *10*(1), 117–125. https://doi.org/10.22342/jme.10.1.5379.117-126

Nuharini, D., & Wahyuni, T. (2008). *Matematika Konsep dan Aplikasinya: untuk SMP/MTs Kelas VIII* (Indratno (ed.)). Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional. Bukupaket.com

Pierce, R. (2022). *Slope (Gradient) of a Straight Line*. Mathsisfun.Com. https://www.mathsisfun.com/geometry/slope.html

Sagar, H. (2022). *Why is the product of the slopes of perpendicular lines -1?* Https://Www.Quora.Com/. https://www.quora.com/Why-is-the-product-of-the-slopes-of-perpendicular-lines-1?no_redirect=1

Sari, C. K., Waluyo, M., Ainur, C. M., & Darmaningsih, E. N. (2017). Menggunakan Contoh Dalam Pembuktian. *JIPMat Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, *2*(1), 1–9. https://doi.org/10.26877/jipmat.v2i1.1475

Sari, M., & Asmendri. (2020). Penelitian Kepustakaan (Library Research) dalam Penelitian Pendidikan IPA. *Natural Science*, *6*(1), 41–53. https://ejournal.uinib.ac.id/jurnal/index.php/naturalscience/article/view/1555/1159

Sibgatullin, I. R., Korzhuev, A. V., Khairullina, E. R., Sadykova, A. R., Baturina, R. V., & Chauzova, V. (2022). A Systematic Review on Algebraic Thinking in Education. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *18*(1), 1–15. https://doi.org/10.1515/ijamh-2015-0117

Stavrou, S. G. (2014). Common Errors and Misconceptions in Mathematical Proving by Education Undergraduates. *IUMPST: The Journal*, *1*(March), 1–8.

Stump, S. (1999). Secondary Mathematics Teachers' Knowledge ofSlope. *Mathematics Education Research Journal*, *11*(2), 124–144. https://doi.org/10.1007/BF03217065

Stump, S. L. (2001). High School Precalculus Students' Understanding of Slope as Measure. *School Science and Mathematics*, *101*(2), 81–89. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2001.tb18009.x

Syafri, F. S. (2017). Kemampuan Representasi Matematis Dan Kemampuan Pembuktian Matematika. *Jurnal Edumath*, *3*(1), 49–55. http://ejournal.stkipmpringsewu-lpg.ac.id/index.php/edumath

Team, M. (2003). The Slope-Intercept Form. *Www.Mathcentre.Ac.Uk*, 1–2. https://www.mathcentre.ac.uk/resources/uploaded/mc-bus-slope-2009-1.pdf

Team, M. (2009). The Gradient of a Straight Line Segment. *Www.Mathcentre.Ac.Uk*, 1–8. https://www.mathcentre.ac.uk/resources/uploaded/mc-ty-gradstlnseg-2009-1.pdf

Tosho, G. (2021a). *Buku Paket Matematika SMP Kelas VIII* (M. Isoda (ed.); 2nd ed.). Pusat Perbukuan Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi. https://buku.kemdikbud.go.id

Tosho, G. (2021b). *Buku Panduan Guru Matematika Sekolah Menengah Pertama* (M. Isoda (ed.); 2nd ed.). Pusat Perbukuan Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.

Utari, T., & Hartono, H. (2019). Muatan Penalaran dan Pembuktian Matematis pada Buku Teks Matematika SMA kelas X Kurikulum 2013. *Jurnal Riset Pendidikan Matematika*, *6*(1), 1–13. https://doi.org/10.21831/jrpm.v6i1.17002

Wiworo, W. (2022). Teachers' Competencies in Doing Direct Proof in Geometry. *Proceedings of the 2nd National Conference on Mathematics Education 2021 (NaCoME 2021)*, *656*(NaCoME 2021), 238–242. https://doi.org/10.2991/assehr.k.220403.034

Zaslavsky, O. (2010). The Explanatory Power of Examples in Mathematics: Challenges for Teaching. *Instructional Explanations in the Disciplines*, 1–237. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0594-9

Zaslavsky, O., Sela, H., & Leron, U. (2002). Being Sloppy about Slope: The Effect of Changing The Scale. *Educational Studies in Mathematics*, *49*(1), 119–140. https://doi.org/10.1023/A:1016093305002