TERMINOLOGI DASAR PADA HIMPUNAN SIMETRISASI ALJABAR MIN-PLUS

Suroto[1)]
Ari wardayani[2)]
Chumaedi Sugihandardji[3)]
[1,2)]Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Jenderal Soedirman
[3)]Jurusan Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Muhammadiyah Purwokerto
e-mail: suroto@unsoed.ac.id

ABSTRACT

This paper discusses some of the terminology and basic properties of the set of min-plus algebra symmetrization. The results are algebraic structure of the positive or zero part of the set of min-plus algebra symmetrization is a semi-field, and the min-plus algebra can be viewed as the positive or zero part in the context of the set of min-plus algebra symmetrization. Furthermore, the form of the result of the subtraction of the elements in the set of min-plus algebra symmetrization, the multiplicative inverse of element in the non zero-positive and negative part, and some basic properties of balance as an analogy to the similarity of linear algebra are also obtained.

Keywords: balance, min-plus algebra, symmetrization, terminology.

ABSTRAK

Pada makalah ini dibahas beberapa terminologi dan sifat dasar pada himpunan simetrisasi aljabar min-plus. Hasil penelitian yang diperoleh adalah struktur aljabar dari bagian positif atau nol himpunan simetrisasi aljabar min-plus merupakan semilapangan, dan aljabar min-plus dapat dipandang sebagai bagian positif atau nol pada konteks himpunan simetrisasi aljabar min-plus. Selain itu juga diperoleh bentuk hasil pengurangan dari elemen-elemen pada himpunan simetrisasi aljabar min-plus, bentuk invers perkalian elemen pada bagian positif dan negatif tak nol, serta beberapa sifat dasar kesetimbangan sebagai analogi dari sifat kesamaan pada aljabar linier.

Kata kunci: aljabar min-plus, setimbang, simetrisasi, terminologi.

Aljabar max-plus merupakan himpunan $R\cup\{-\infty\}$ yang dilengkapi dengan dua operasi biner yakni “minimum” sebagai operasi penjumlahan dan “penjumlahan biasa” sebagai operasi perkalian, dengan R adalah himpunan bilangan riil. Aljabar min-plus merupakan dual dari aljabar max-plus yakni himpunan $R\cup\{\infty\}$ yang dilengkapi dengan dua operasi biner yakni “minimum” sebagai operasi penjumlahan dan “penjumlahan biasa” sebagai operasi perkalian, dengan R adalah himpunan bilangan riil. Untuk selanjutnya, aljabar max-plus dinotasikan dengan R_max dan aljabar min-plus dinotasikan dengan R_min. Pembahasan mengenai aljabar max-plus dapat dilihat pada (Baccelli et al., 2001), (Goto, 2014), (Gyamerah et al., 2016). Pembahasan mengenai aljabar min-plus dapat dilihat pada (Subiono, 2015), (Watanabe & Watanabe, 2014). Struktur aljabar yang terbentuk dari aljabar min-plus adalah semilapangan dengan elemen nol $E=\infty$ dan elemen satuan $e=0$. Untuk setiap elemen pada R_min tidak memiliki invers penjumlahan, kecuali untuk elemen nol.

Pembahasan mengenai perluasan aljabar max-plus menjadi aljabar max-plus tersimetri sudah dilakukan untuk mengatasi masalah invers penjumlahan pada aljabar max-plus (Baccelli et al., 2001).

Beberapa masalah terkait dengan invers penjumlahan yang tidak dapat diselesaikan pada aljabar max-plus dapat ditinjau melalui masalah pada aljabar max-plus tersimetri. Salah satu kelebihan aljabar max-plus tersimetri adalah adanya suatu kaitan yang mengkorespondensikan konsep pada aljabar max-plus tersimetri dengan aljabar linier (De Schutter, 1996). Permasalahan pada aljabar max-plus tersimetri dapat dikorespondensikan dengan masalah pada aljabar linier, kemudian penyelesaian dilakukan pada konteks aljabar linier, dan penyelesaian yang diperoleh dapat dikorespondensikan kembali pada aljabar max-plus tersimetri (De Schutter & De Moor, 2002).

Beberapa permasalahan terkadang tidak dapat dimodelkan dalam konteks aljabar max-plus, dan merupakan suatu permasalahan dalam konteks aljabar min-plus. Penerapan aljabar min-plus pada berbagai bidang sudah banyak dilakukan, antara lain masalah rute tercepat distribusi susu (Suwanti et al., 2017), masalah simulasi produksi susu (Pramesthi, 2021), masalah distribusi kentang (Putri, 2016), masalah jaringan angkutan (Susilowati, 2018). Penelitian pengembangan aljabar min-plus juga sudah beberapa dilakukan antara lain masalah dualitas max-plus dan min-plus jaringan (Liebeherr, 2017), masalah arsitektur jaringan, (Darbon et al., 2021), nilai eigen pada matriks atas aljabar min-plus (Hook, 2017), (Rahayu et al., 2021), masalah aljabar min-plus interval (Awallia et al., 2020), dan basis atas aljabar min-plus (Rosyada et al., 2021).

Pada aljabar min-plus, setiap elemen tidak memiliki invers penjumahan, kecuali untuk elemen nol. Hal ini tentunya juga mempengaruhi penyelesaian permasalahan pada aljabar min-plus yang melibatkan invers penjumlahan. Pembahasan mengenai simetrisasi aljabar min-plus untuk mengatasi masalah invers penjumlahan pada aljabar min-plus sudah dilakukan (Suroto, 2022). Proses simetrisasi dilakukan dengan menggunakan relasi setimbang ∇ dan mengadopsi gagasan perluasan himpunan semua bilangan cacah menjadi himpunan semua bilangan bulat pada aljabar linier. Apabila permasalahan ditinjau melalui simetrisasi aljabar min-plus, maka peranan invers penjumlahan dapat digantikan dengan operator minus $\ominus$. Akan tetapi operator minus pada simetrisasi aljabar min-plus bukan merupakan suatu bentuk invers penjumlahan seperti halnya negatif pada aljabar linier. Pada pembahasan simetrisasi aljabar min-plus tersebut, diperoleh bentuk kelas-kelas ekuivalensi dari simetrisasi aljabar min-plus. Untuk selanjutnya, himpunan kelas-kelas ekuivalensi yang dihasilkan dari simetrisasi aljabar min-plus dinotasikan dengan S.

Pada masalah persamaan linier $x \oplus 2 = E$, tidak ada solusi x yang memenuhi pada konteks aljabar min-plus R_min. Apabila masalah tersebut ditinjau melalui konteks kesetimbangan linier pada simetrisasi aljabar min-plus S, yakni $x \oplus \overline{2} \, \nabla \, E$, maka dapat ditentukan solusi untuk x yaitu $\ominus 2$. Selanjutnya, agar himpunan simetrisasi aljabar min-plus dapat digunakan secara baik pada masalah kesetimbangan linier secara umum yakni $a \otimes \overline{x} \oplus \overline{b} \, \nabla \, c$, maka diperlukan beberapa terminologi dan sifat-sifat dasar pada himpunan simetrisasi aljabar min-plus untuk menentukan solusi pada masalah kesetimbangan linier tersebut.

METODE

Penelitian ini adalah studi literatur yang sifatnya mengembangkan penelitian yang sudah ada sebelumnya, yakni masalah simetrisasi aljabar min-plus. Pada penelitian ini dibahas tentang beberapa terminologi dan sifat dasar himpunan yang dihasilkan dari simetrisasi aljabar min-plus (Suroto, 2022) dengan mengacu pada relasi setimbang yang merujuk pada (Baccelli et al., 2001). Langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah:

1. Menunjukkan struktur aljabar yang terbentuk dari himpunan simetrisasi aljabar min-plus.

2. Menunjukkan bahwa aljabar min-plus dapat dipandang sebagai bagian positif dari himpunan simetrisasi aljabar min-plus.
3. Menunjukkan hasil operasi pengurangan pada himpunan simetrisasi aljabar min-plus.
4. Menunjukkan beberapa sifat kesetimbangan pada himpunan simetrisasi aljabar min-plus.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini merupakan pembahasan utama pada penelitian ini. Pada bagian ini disajikan beberapa terminologi dan sifat dasar dari himpunan hasil simetrisasi alljabar min-plus. Pembahasan meliputi invers perkalian, aljabar min-plus sebagai kejadian khusus dari himpunan simetrisasi aljabar min-plus, bentuk hasil operasi pengurangan dan beberapa sifat kesetimbangan dari himpunan simetrisasi aljabar min-plus. Hasil ini selanjutnya memiliki peranan penting pada masalah kesetimbangan linier $a \overline{\otimes}\, x \,\overline{\oplus}\, b \,\nabla\, c$ pada himpunan simetrisasi aljabar min-plus.

Pada proses simetrisasi aljabar min-plus $\mathbb{R}_{\min}$, langkah awal yang dilakukan adalah membentuk himpunan $\mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$. Untuk $u = (p, q) \in \mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$ didefinisikan minus dari u yakni $\ominus u = (q, p)$, dan setimbang dari u yakni $u^{\bullet} = u \oplus (\ominus u)$. Untuk $u = (p, q)$, $v = (r, s) \in \mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$, u dikatakan berelasi setimbang dengan v (dinotasikan dengan $u \nabla v$) apabila $p \oplus s = q \oplus r$. Himpunan semua kelas-kelas ekuivalensi pada $\mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$ yang diperoleh dari proses simetrisasi dinotasikan dengan S. Pada proses simetrisasi ini, kelas-kelas ekuivalensi dapat dikelompokkan menjadi

1. Kelas $\overline{(\infty, x)} = \{(a, x) \in \mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min} | a > x\}$ dinamakan bagian positif,
2. Kelas $\overline{(x, \infty)} = \{(x, a) \in \mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min} | a > x\}$ dinamakan bagian negatif,
3. Kelas $\overline{(x, x)} = \{(x, x) \in \mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}\}$, dinamakan bagian setimbang.

Untuk selanjutnya, kelas $\bar{\mathcal{E}} = \overline{(\infty, \infty)}$ dinamakan bagian nol. Himpunan semua bagian positif atau nol dinotasikan ${\mathbb{R}_{\min}}^{\oplus}$, himpunan semua bagian negatif atau nol dinotasikan ${\mathbb{R}_{\min}}^{\ominus}$, dan himpunan semua bagian setimbang dinotasikan ${\mathbb{R}_{\min}}^{\bullet}$, dengan ${\mathbb{R}_{\min}}^{\oplus} \cup {\mathbb{R}_{\min}}^{\ominus} \cup {\mathbb{R}_{\min}}^{\bullet} = S$ dan ${\mathbb{R}_{\min}}^{\oplus} \cap {\mathbb{R}_{\min}}^{\ominus} \cap {\mathbb{R}_{\min}}^{\bullet} = \{\bar{\mathcal{E}}\}$. Selanjutnya, elemen pada ${\mathbb{R}_{\min}}^{\oplus}$ cukup dinotasikan x, elemen pada ${\mathbb{R}_{\min}}^{\ominus}$ cukup dinotasikan $\ominus x$ dan elemen pada ${\mathbb{R}_{\min}}^{\bullet}$ cukup dinotasikan $x^{\bullet}$. Pembahasan lebih detail mengenai proses simetrisasi pada aljabar min-plus $\mathbb{R}_{\min}$ dapat dilihat pada (Suroto, 2022).

Pada bagian awal pembahasan ini, terlebih dahulu didefinisikan himpunan elemen bertanda pada hasil simetrisasi aljabar min-plus yang berperan seperti halnya himpunan bilangan positif atau negatif pada pembahasan aljabar linier. Berikut diberikan definisi himpunan semua elemen bertanda.

Definisi 1. *Himpunan* $S^{\wedge} \overset{\text{def}}{=} {\mathbb{R}_{\min}}^{\oplus} \cup {\mathbb{R}_{\min}}^{\ominus}$ *dinamakan himpunan semua elemen bertanda yakni himpunan semua bagian positif, negatif atau nol pada himpunan simetrisasi aljabar min-plus.*

Himpunan $S^{\wedge}$ pada Definisi 1 tidak memuat bagian setimbang pada S, dan hanya memuat bagian positif, negatif atau nol. Operasi penjumlahan dan perkalian pada S didefinisikan dengan mengadopsi pada $\mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$ yakni

$$\overline{(p, q)} \,\overline{\oplus}\, \overline{(r, s)} = \overline{(p \oplus r, q \oplus s)}$$

$$\overline{(p, q)} \,\overline{\otimes}\, \overline{(r, s)} = \overline{(p \otimes r \oplus q \otimes s, p \otimes s \oplus q \otimes r)}$$

untuk setiap $\overline{(p,q)}, \overline{(r,s)} \in S$. Berikut diberikan lemma yang menjelaskan bentuk invers perkalian dari bagian positif tak nol dan bagian negatif tak nol pada himpunan simetrisasi aljabar min-plus. Elemen nol (identitas terhadap penjumlahan) dan elemen satuan (identitas terhadap perkalian) pada S masing-masing adalah $\bar{\mathcal{E}} = \overline{(\infty,\infty)}$ dan $\bar{e} = \overline{(0,\infty)}$.

Lemma 2. *Bentuk invers perkalian dari bagian positif tak nol* $\overline{(x,\infty)}$ *adalah* $\overline{(-x,\infty)}$.

Bukti. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\overline{(x,\infty)}\ \overline{\otimes}\ \overline{(-x,\infty)} &= \overline{(x\otimes(-x)\oplus\infty\otimes\infty, x\otimes\infty\oplus\infty\otimes -x)}\\ &= \overline{(\min\{x+(-x),\infty+\infty\},\min\{x+\infty,\infty+(-x)\})}\\ &= \overline{(\min\{0,\infty\},\min\{\infty,\infty\})} = \overline{(0,\infty)},\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\overline{(-x,\infty)}\ \overline{\otimes}\ \overline{(x,\infty)} &= \overline{(-x\otimes x\oplus\infty\otimes\infty, -x\otimes\infty\oplus\infty\otimes x)}\\ &= \overline{(\min\{-x+x,\infty+\infty\},\min\{-x+\infty,\infty+x\})}\\ &= \overline{(\min\{0,\infty\},\min\{\infty,\infty\})} = \overline{(0,\infty)}.\end{aligned}$$

Dengan demikian, bentuk invers perkalian dari $\overline{(x,\infty)}$ adalah $\overline{(-x,\infty)}$. ■

Lemma 3. *Bentuk invers perkalian dari bagian negatif tak nol* $\overline{(\infty,x)}$ *adalah* $\overline{(\infty,-x)}$

Bukti. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\overline{(\infty,x)}\ \overline{\otimes}\ \overline{(\infty,-x)} &= \overline{(\infty\otimes\infty\oplus x\otimes(-x)\,,\infty\otimes -x\oplus x\otimes\infty)}\\ &= \overline{(\min\{\infty+\infty,x+(-x)\},\min\{\infty+(-x),x+\infty\})}\\ &= \overline{(\min\{\infty,0\},\min\{\infty,\infty\})} = \overline{(0,\infty)}\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\overline{(\infty,-x)}\ \overline{\otimes}\ \overline{(\infty,x)} &= \overline{(\infty\otimes\infty\oplus(-x)\otimes x\,,\infty\otimes x\oplus -x\otimes\infty)}\\ &= \overline{(\min\{\infty+\infty,-x+x\},\min\{\infty+x,-x+\infty\})}\\ &= \overline{(\min\{\infty,0\},\min\{\infty,\infty\})} = \overline{(0,\infty)}.\end{aligned}$$

Dengan demikian, bentuk invers dari $\overline{(\infty,x)}$ adalah $\overline{(\infty,-x)}$. ■

Berdasarkan Lemma 2 dan Lemma 3 diperoleh akibat seperti berikut ini.

Akibat 4. *Setiap elemen bertanda tak nol pada* $S^{\wedge}$ *memiliki invers perkalian*.

Bukti. Dengan melihat pada pembuktian Lemma 2 dan Lemma 3, maka dapat disimpulkan bahwa setiap elemen bertanda tak nol pada $S^{\wedge}$ memiliki invers perkalian. ■

Selanjutnya akan ditentukan struktur aljabar yang terbentuk dari bagian positif, bagian negatif dan bagian setimbang dari hasil simetrisasi aljabar min-plus.

Lemma 5. *Himpunan bagian positif* $\mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$ *terhadap operasi penjumlahan merupakan semigrup idempoten komutatif dengan elemen nol*.

Bukti. Ambil sembarang $\overline{(x,\infty)}, \overline{(y,\infty)}, \overline{(z,\infty)} \in \mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$. Diperhatikan bahwa

1. $\overline{(x,\infty)}\ \overline{\oplus}\ \overline{(y,\infty)} = \overline{(x\oplus y,\infty)} = \overline{(\min\{x,y\},\infty)} \in \mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$. Dengan demikian operasi penjumlahan bersifat tertutup pada $\mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$.
2. $$\begin{aligned}\left(\overline{(x,\infty)}\ \overline{\oplus}\ \overline{(y,\infty)}\right)\ \overline{\oplus}\ \overline{(z,\infty)} &= \overline{(x\oplus y,\infty)}\ \overline{\oplus}\ \overline{(z,\infty)}\\ &= \overline{((x\oplus y)\oplus z,\infty)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{(\min\{\min\{x,y\},z\},\infty)} \\
&= \overline{(\min\{x,y,z\},\infty)} \\
&= \overline{(\min\{x,\min\{y,z\}\},\infty)} \\
&= \overline{(x \oplus (y \oplus z),\infty)} \\
&= \overline{(x,\infty)}\ \overline{\oplus}\ \overline{(y \oplus z,\infty)} \\
&= \overline{(x,\infty)}\ \overline{\oplus}\ \left(\overline{(y,\infty)}\ \overline{\oplus}\ \overline{(z,\infty)}\right).
\end{aligned}
$$

Dengan demikian operasi penjumlahan bersifat assosiatif pada $\mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$.

3. $\overline{(x,\infty)}\ \overline{\oplus}\ \overline{(y,\infty)} = \overline{(x \oplus y,\infty)} = \overline{(\min\{x,y\},\infty)} = \overline{(\min\{y,x\},\infty)} = \overline{(y \oplus x,\infty)} = \overline{(y,\infty)}\ \overline{\oplus}\ \overline{(x,\infty)}$. Dengan demikian operasi penjumlahan bersifat komutatif pada $\mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$.
4. Elemen nol pada $\mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$ adalah $\overline{(\infty,\infty)}$, karena untuk setiap $\overline{(x,\infty)} \in \mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$ berlaku $\overline{(\infty,\infty)}\ \overline{\oplus}\ \overline{(x,\infty)} = \overline{(\infty \oplus x,\infty)} = \overline{(\min\{\infty,x\},\infty)} = \overline{(x,\infty)}$.
5. Operasi penjumlahan pada $\mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$ bersifat idempoten, yakni untuk setiap $\overline{(x,\infty)} \in \mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$ berlaku $\overline{(x,\infty)}\ \overline{\oplus}\ \overline{(x,\infty)} = \overline{(x \oplus x,\infty)} = \overline{(\min\{x,x\},\infty)} = \overline{(x,\infty)}$.

Berdasarkan uraian 1,2,3,4 dan 5, dapat simpulkan bahwa $\mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$ yang dilengkapi operasi penjumlahan merupakan semigrup idempoten komutatif dengan elemen nol. ■

Lemma 6. *Himpunan bagian positif $\mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$ terhadap operasi perkalian merupakan semigrup komutatif dengan elemen satuan*.

Bukti. Ambil sembarang $\overline{(x,\infty)}, \overline{(y,\infty)}, \overline{(z,\infty)} \in \mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$. Diperhatikan bahwa

1. $$
\begin{aligned}
\overline{(x,\infty)}\ \overline{\otimes}\ \overline{(y,\infty)} &= \overline{(x \otimes y \oplus \infty \otimes \infty, x \otimes \infty \oplus \infty \otimes y)} \\
&= \overline{(\min\{x+y,\infty+\infty\},\min\{x+\infty,\infty+y\})} \\
&= \overline{(x+y,\infty)} \in \mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}.
\end{aligned}
$$
   Dengan demikian, operasi perkalian bersifat tertutup pada $\mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$.
2. $$
\begin{aligned}
&\left(\overline{(x,\infty)}\ \overline{\otimes}\ \overline{(y,\infty)}\right)\ \overline{\otimes}\ \overline{(z,\infty)} \\
&= \overline{(x \otimes y \oplus \infty \otimes \infty, x \otimes \infty \oplus \infty \otimes y)}\ \overline{\otimes}\ \overline{(z,\infty)} \\
&= \overline{((x \otimes y \oplus \infty \otimes \infty) \otimes z \oplus (x \otimes \infty \oplus \infty \otimes y) \otimes \infty, (x \otimes y \oplus \infty \otimes \infty) \otimes \infty \oplus} \\
&\quad \overline{(x \otimes \infty \oplus \infty \otimes y) \otimes z)} \\
&= \overline{(\min\{\min\{x+y,\infty\}+z, \min\{\infty,\infty\}+\infty\}, \min\{\min\{x+y,\infty\}+\infty, \min\{\infty,\infty\}+z\})} \\
&= \overline{(\min\{(x+y)+z,\infty\}, \min\{\infty,\infty\})} \\
&= \overline{((x+y)+z,\infty)} \\
&= \overline{(x+(y+z),\infty)} \\
&= \overline{(\min\{x+(y+z),\infty\}, \min\{\infty,\infty\})} \\
&= \overline{(\min\{\min\{x+y,\infty\}+z, \min\{\infty,\infty\}+\infty\}, \min\{\min\{x+y,\infty\}+\infty, \min\{\infty,\infty\}+z\})} \\
&= \overline{((x \otimes (y \otimes z \oplus \infty \otimes \infty) \oplus \infty \otimes (y \otimes \infty \oplus \infty \otimes z),\ x \otimes (y \otimes \infty \oplus \infty \otimes z) \oplus} \\
&\quad \overline{\infty \otimes (y \otimes z \oplus \infty \otimes \infty))} \\
&= \overline{(x,\infty)}\ \overline{\otimes}\ \overline{(y \otimes z \oplus \infty \otimes \infty, y \otimes \infty \oplus \infty \otimes z)} \\
&= \overline{(x,\infty)}\ \overline{\otimes}\ \left(\overline{(y,\infty)}\ \overline{\otimes}\ \overline{(z,\infty)}\right)
\end{aligned}
$$
   Dengan demikian, operasi perkalian bersifat assosiatif pada $\mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$.
3. $$
\begin{aligned}
\overline{(x,\infty)}\ \overline{\otimes}\ \overline{(y,\infty)} &= \overline{(x \otimes y \oplus \infty \otimes \infty, x \otimes \infty \oplus \infty \otimes y)} \\
&= \overline{(\min\{x+y,\infty+\infty\},\min\{x+\infty,\infty+y\})}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{(x+y,\infty)} \\
&= \overline{(y+x,\infty)} \\
&= \overline{(\min\{y+x,\infty+\infty\},\min\{y+\infty,\infty+x\})} \\
&= \overline{(y \otimes x \oplus \infty \otimes \infty,\ y \otimes \infty \oplus \infty \otimes x)} \\
&= \overline{(y,\infty)} \mathbin{\overline{\otimes}} \overline{(x,\infty)}
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, operasi perkalian bersifat komutatif pada $\mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$.

4. Elemen satuan pada $\mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$ adalah $\overline{(0,\infty)}$, karena untuk setiap $\overline{(x,\infty)} \in \mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$ berlaku

$$
\begin{aligned}
\overline{(0,\infty)} \mathbin{\overline{\otimes}} \overline{(x,\infty)} &= \overline{(0 \otimes x \oplus \infty \otimes \infty, 0 \otimes \infty \oplus \infty \otimes x)} \\
&= \overline{(\min\{0+x,\infty+\infty\},\min\{0+\infty,\infty+x\})} \\
&= \overline{(x,\infty)}.
\end{aligned}
$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$ terhadap operasi perkalian membentuk semigrup komutatif dengan elemen satuan. ■

Elemen nol $\overline{(\infty,\infty)}$ merupakan elemen penyerap terhadap operasi perkalian pada S dan berlaku sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan. Dengan demikian, sifat elemen penyerap dari elemen nol $\overline{(\infty,\infty)}$ pada $\mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$ dan sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan dapat langsung diwariskan dari sifat elemen penyerap dan distributif pada S. Berdasarkan Lemma 2, Lemma 5, Lemma 6, sifat elemen penyerap dan sifat distributif, maka dapat diperoleh struktur aljabar semilapangan dari $\mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$ yang disajikan daalam akibat berikut ini.

Akibat 7. *Himpunan* $\mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$ *merupakan semilapangan.*

Bukti. Berdasarkan pembuktian pada Lemma 2, Lemma 5, Lemma 6, sifat elemen penyerap dan distributif, maka dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$ membentuk semilapangan. ■

Diperhatikan bahwa $\mathbb{R}_{\min}{}^{\ominus}$ dan $\mathbb{R}_{\min}{}^{\bullet\cdot}$ masing-masing bukan merupakan semilapangan. Hal ini dikarenakan untuk setiap $\overline{(\infty,x)}, \overline{(\infty,y)} \in \mathbb{R}_{\min}{}^{\ominus}$ diperoleh

$$
\begin{aligned}
\overline{(\infty,x)} \mathbin{\overline{\otimes}} \overline{(\infty,y)} &= \overline{(\infty \otimes \infty \oplus x \otimes y, \infty \otimes y \oplus \infty \otimes x)} \\
&= \overline{(\min\{\infty+\infty,x+y\},\min\{\infty+y,\infty+x\})} \\
&= \overline{(x+y,\infty)},
\end{aligned}
$$

dengan bentuk $\overline{(x+y,\infty)}$ bukan merupakan elemen pada $\mathbb{R}_{\min}{}^{\ominus}$, kecuali untuk $x+y=\infty$. Dengan demikian, operasi perkalian tidak tertutup pada $\mathbb{R}_{\min}{}^{\ominus}$. Selanjutnya, $\overline{(0,\infty)}$ bukan merupakan elemen pada $\mathbb{R}_{\min}{}^{\bullet\cdot}$, sehingga $\mathbb{R}_{\min}{}^{\bullet}$ tidak memiliki elemen satuan.

Karena $\mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$ dan $\mathbb{R}_{\min}$ masing-masing merupakan semilapangan, maka akan dibentuk suatu korespondensi satu-satu yang mengawetkan operasi penjumlahan dan perkalian. Korespondensi satu-satu ini selanjutnya digunakan untuk meninjau $\mathbb{R}_{\min}$ sebagai $\mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$ pada himpunan simetrisasi aljabar min-plus.

Teorema 8. *Pemetaan* $T: \mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus} \to \mathbb{R}_{\min}$ *dengan definisi* $T\left(\overline{(x,\infty)}\right) = x$ *merupakan korespondensi satu-satu yang mngawetkan operasi penjumlahan dan perkalian.*

Bukti. Ambil sembarang $\overline{(x,\infty)}, \overline{(y,\infty)} \in \mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$. Apabila $T\left(\overline{(x,\infty)}\right) = T\left(\overline{(y,\infty)}\right)$ maka diperoleh $x = y$, akibatnya $\overline{(x,\infty)} = \overline{(y,\infty)}$ dan T bersifat injektif. Selanjutnya, untuk setiap $x \in$

$\mathbb{R}_{\min}$, selalu terdapat $\overline{(x,\infty)} \in \mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$ sedemikian hingga $T\left(\overline{(x,\infty)}\right) = x$. Akibatnya T juga bersifat surjektif. Dengan demikian T merupakan suatu korespondensi satu-satu.
Karena $T\left(\overline{(x,\infty)} \oplus \overline{(y,\infty)}\right) = T\left(\overline{(x \oplus y,\infty)}\right) = x \oplus y = T\left(\overline{(x,\infty)}\right) \oplus T\left(\overline{(y,\infty)}\right)$ dan $T\left(\overline{(x,\infty)} \otimes \overline{(y,\infty)}\right) = T\left(\overline{(x \otimes y,\infty)}\right) = x \otimes y = T\left(\overline{(x,\infty)}\right) \otimes T\left(\overline{(y,\infty)}\right)$, maka T mengawetkan operasi penjumlahan dan perkalian. Dengan demikian T merupakan suatu korespondensi satu-satu yang mengawetkan operasi penjumlahan dan perkalian. ■

Berdasarkan Teorema 8 tersebut, maka $\mathbb{R}_{\min}$ dapat dipandang melalui $\mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$ pada konteks pembicaraan himpunan simetrisasi aljabar min-plus S. Operator minus pada S juga mengacu pada operator minus pada proses simetrisasi aljabar min-plus, yakni $\ominus\,(a,b) = (b,a)$. Operator minus selanjutnya akan digunakan peranannya untuk melakukan operasi pengurangan pada himpunan simetrisasi aljabar min-plus. Karena S merupakan suatu semiring maka tidak memenuhi eksistensi invers penjumlahan. Dengan demikian perlu dilakukan pengembangan pembahasan pada sifat hasil operasi "pengurangan".

Lemma 9. *Untuk $x, y \in \mathbb{R}_{\min}$, jika $x < y$ maka $x \oplus (\ominus\, y) = x$*

Bukti. Karena $x, y \in \mathbb{R}_{\min}$ maka dapat disajikan dengan bentuk $\overline{(x,\infty)}, \overline{(y,\infty)}$ pada S. Selanjutnya $x \oplus (\ominus\, y)$ dapat disajikan sebagai $\overline{(x,\infty)} \mathbin{\overline{\oplus}} \left(\ominus\, \overline{(y,\infty)}\right) = \overline{(x,\infty)} \mathbin{\overline{\oplus}} \overline{(\infty,y)} = \overline{(x \oplus \infty, \infty \oplus y)} = \overline{(\min\{x,\infty\}, \min\{\infty,y\})} = \overline{(x,y)}$. Karena $x < y$ maka $\overline{(x,y)} = \overline{(x,\infty)}$, sehingga $\overline{(x,y)}$ dapat dikorespondensikan dengan x. Jadi diperoleh bahwa $x \oplus (\ominus\, y) = x$.■

Lemma 10. *Untuk $x, y \in \mathbb{R}_{\min}$, jika $x > y$ maka $x \oplus (\ominus\, y) = \ominus\, y$*

Bukti. Karena $x, y \in \mathbb{R}_{\min}$ maka dapat disajikan dalam bentuk $\overline{(x,\infty)}, \overline{(y,\infty)}$ pada S. Selanjutnya $x \oplus (\ominus\, y)$ dapat disajikan dengan $\overline{(x,\infty)} \mathbin{\overline{\oplus}} \left(\ominus\, \overline{(y,\infty)}\right) = \overline{(x,\infty)} \mathbin{\overline{\oplus}} \overline{(\infty,y)} = \overline{(x \oplus \infty, \infty \oplus y)} = \overline{(\min\{x,\infty\}, \min\{\infty,y\})} = \overline{(x,y)}$. Karena $x > y$ maka $\overline{(x,y)} = \overline{(\infty,y)}$, sehingga $\overline{(x,y)}$ dapat dikorespondensikan dengan $\ominus\, y$. Jadi diperoleh $x \oplus (\ominus\, y) = \ominus\, y$.■

Lemma 11. *Untuk $x, y \in \mathbb{R}_{\min}$, jika $x = y$ maka $x \oplus (\ominus\, y) = x^{\bullet}$*

Bukti. Karena $x, y \in \mathbb{R}_{\min}$ maka dapat disajikan dalam bentuk $\overline{(x,\infty)}, \overline{(y,\infty)}$ pada S. Selanjutnya $x \oplus (\ominus\, y)$ dapat disajikan sebagai $\overline{(x,\infty)} \mathbin{\overline{\oplus}} \left(\ominus\, \overline{(y,\infty)}\right) = \overline{(x,\infty)} \mathbin{\overline{\oplus}} \overline{(\infty,y)} = \overline{(x \oplus \infty, \infty \oplus y)} = \overline{(\min\{x,\infty\}, \min\{\infty,y\})} = \overline{(x,y)}$. Karena $x = y$ maka $\overline{(x,y)} = \overline{(x,x)}$, sehingga $\overline{(x,y)}$ dapat dikorespondensikan dengan $x^{\bullet}$. Jadi $x \oplus (\ominus\, y) = x^{\bullet}$.■

Berdasarkan Lemma 9, Lemma 10 dan Lemma 11, diperoleh bentuk operasi pengurangan pada S yang didefinisikan dengan $x \ominus y = \ x \mathbin{\overline{\oplus}} (\ominus\, y)$, untuk $x, y \in S$. Dengan demikian

$$x \ominus y = \begin{cases} x & ,\text{untuk } x < y \\ \ominus\, y & ,\text{untuk } x > y. \\ x^{\bullet} & ,\text{untuk } x = y \end{cases}$$

Setelah diperoleh bentuk hasil operasi pengurangan pada S, selanjutnya dibahas mengenai sifat-sifat terkait kesetimbangan pada S. Sifat-sifat yang dibahas ini mengacu pada kesamaan pada aljabar linier. Beberapa sifat yang diperoleh merupakan analogi antara kesamaan pada aljabar linier dengan kesetimbangan pada himpunan simetrisasi aljabar min-plus.

Dua buah lemma berikut menjelaskan sifat yang dapat digunakan untuk menganalogikan pernyataan dalam aljabar linier menjadi suatu pernyataan pada simetrisasi min-plus, yakni untuk setiap x pasti berlaku $x = x$, dan untuk setiap x, y, jika $x = y$ maka berlaku $y = x$. Kedua sifat ini akan dibahas keberlakuannya dalam konteks himpunan simetrisasi aljabar min-plus.

Lemma 12. *Untuk setiap $x \in S$ berlaku $x \nabla x$.*

Bukti. Misalkan $x = \overline{(p,q)}$. Diperhatikan bahwa $p \oplus q = \min\{p,q\} = \min\{q,p\} = q \oplus p$. Dengan demikian $x = \overline{(p,q)} \nabla \overline{(p,q)} = x$.■

Lemma 13. *Untuk setiap $x, y \in S$ berlaku $x\nabla y$ jika dan hanya jika $y\nabla x$.*

Bukti. Misalkan $x = \overline{(p,q)}$ dan $y = \overline{(r,s)}$ Diperhatikan bahwa $x\nabla y$ jika dan hanya jika $\overline{(p,q)} \nabla \overline{(r,s)}$. Dari sini diperoleh bahwa

$$
\begin{aligned}
p \oplus s = q \oplus r \quad & \Leftrightarrow \min\{p,s\} = \min\{q,r\} \\
& \Leftrightarrow \min\{r,q\} = \min\{s,p\} \\
& \Leftrightarrow r \oplus q = s \oplus p \\
& \Leftrightarrow \overline{(r,s)} \nabla \overline{(p,q)} \\
& \Leftrightarrow y \nabla x.
\end{aligned}
$$

Jadi $x\nabla y$ jika dan hanya jika $y\nabla x$. ■

Sifat berikut menjelaskan analogi pernyataan pada aljabar linier yakni $x = y$ jika dan hanya jika $x - y = 0$. Sifat tersebut akan dijelaskan analoginya dalam konteks pembahasan himpunan simetrisasi aljabar min-plus, seperti pada lemma berikut ini.

Lemma 14. *Untuk setiap $x, y \in S$, $x\nabla y$ jika dan hanya jika $x \ominus y\nabla\bar{\mathcal{E}}$*

Bukti. Misalkan $x = \overline{(p,q)}$ dan $y = \overline{(r,s)}$ Diperhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
x\nabla y \quad & \Leftrightarrow \overline{(p,q)}\nabla\overline{(r,s)} \\
& \Leftrightarrow p \oplus s = q \oplus r \\
& \Leftrightarrow \min\{p,s\} = \min\{q,r\} \\
& \Leftrightarrow \min\{\min\{p,s\},\infty\} = \min\{\min\{q,r\},\infty\} \\
& \Leftrightarrow (p \oplus s) \oplus \mathcal{E} = (q \oplus r) \oplus \mathcal{E} \\
& \Leftrightarrow \overline{(p \oplus s, q \oplus r)}\nabla\overline{(\mathcal{E},\mathcal{E})} \\
& \Leftrightarrow \overline{(p,q)} \oplus \overline{(s,r)}\nabla\overline{(\mathcal{E},\mathcal{E})} \\
& \Leftrightarrow \overline{(p,q)} \oplus \left(\ominus\overline{(r,s)}\right)\nabla\overline{(\mathcal{E},\mathcal{E})} \\
& \Leftrightarrow \overline{(p,q)} \ominus \overline{(r,s)}\nabla\overline{(\mathcal{E},\mathcal{E})} \\
& \Leftrightarrow x \ominus y\nabla\bar{\mathcal{E}}.
\end{aligned}
$$

Jadi $x\nabla y$ jika dan hanya jika $x \ominus y\nabla\bar{\mathcal{E}}$. ■

Berdasarkan Lemma 14, diperoleh akibat seperti berikut ini.

Akibat 15. *Untuk $a, b \in S$, $a\nabla b$ jika dan hanya jika $a \ominus b \in \mathbb{R}_{\min}^{\bullet}$*

Bukti. Ambil sembarang $u = \overline{(p,q)}$ dengan $u\nabla\bar{\mathcal{E}}$. Karena $u\nabla\bar{\mathcal{E}}$ maka $\overline{(p,q)}\nabla\overline{(\infty,\infty)}$, yang berarti $p \oplus \infty = q \oplus \infty$. Dari sini diperoleh $\min\{p,\infty\} = \min\{q,\infty\}$ yang mengakibatkan $p = q$. Karena $p = q$ maka haruslah $\overline{(p,q)} = u \in \mathbb{R}_{\min}^{\bullet}$. Dengan demikian, untuk sembarang elemen $u \in$

S dengan $u\nabla\bar{\mathcal{E}}$, maka haruslah $u \in \mathbb{R}_{\min}{}^{\bullet}$. Selanjutnya, berdasarkan Lemma 14 diperoleh bahwa $a\nabla b$ jika dan hanya jika $a \ominus b\nabla\mathcal{E}$. Dengan demikian diperoleh bahwa $a \ominus b \in \mathbb{R}_{\min}{}^{\bullet}$.■

Pada pembahasan aljabar linier, jika $x = y$ dan $m = n$ maka berlaku $x + m = y + n$, dan jika $x = y$ maka berlaku $xm = ym$. Kedua sifat pada aljabar linier ini akan dinyatakan analoginya dalam konteks himpunan simetrisasi aljabar min-plus, seperti disajikan pada dua buah lemma berikut ini.

Lemma 16. *Untuk setiap $x, y, m, n \in S$, jika $x\nabla y$ dan $m\nabla n$ maka $x \overline{\oplus}\, m \nabla y \overline{\oplus}\, n$*

Bukti. Misalkan $x = \overline{(p,q)}$, $y = \overline{(r,s)}$, $m = \overline{(t,u)}$ dan $n = \overline{(v,w)}$. Diperhatikan bahwa jika $x\nabla y$ maka $\overline{(p,q)}\nabla\overline{(r,s)}$. Dari sini diperoleh $p \oplus s = q \oplus r$, yang mengakibatkan $\min\{p,s\} = \min\{q,r\}$. Jika $m\nabla n$ maka $\overline{(t,u)} \nabla \overline{(v,w)}$. Diperoleh bahwa $t \oplus w = u \oplus v$, yang mengakibatkan $\min\{t,w\} = \min\{u,v\}$. Selanjutnya, karena $\min\{\min\{p,s\},\min\{t,w\}\} = \min\{\min\{q,r\},\min\{u,v\}\}$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
&\min\{p,s,t,w\} = \min\{q,r,u,v\}\\
&\Leftrightarrow \min\{\min\{p,t\},\min\{s,w\}\} = \min\{\min\{q,u\},\min\{r,v\}\}\\
&\Leftrightarrow \min\{\min\{p,t\},\min\{s,w\}\} = \min\{\min\{q,u\},\min\{r,v\}\}\\
&\Leftrightarrow (p \oplus t) \oplus (s \oplus w) = (q \oplus u) \oplus (r \oplus v)\\
&\Leftrightarrow \overline{(p \oplus t, q \oplus u)}\nabla\overline{(r \oplus v, s \oplus w)}\\
&\Leftrightarrow \overline{(p,q)} \overline{\oplus} \overline{(t,u)} \nabla \overline{(r,s)} \overline{\oplus} \overline{(v,w)}\\
&\Leftrightarrow x \overline{\oplus}\, m \nabla y \overline{\oplus}\, n.
\end{aligned}$$

Jadi diperoleh bahwa jika $x\nabla y$ dan $m\nabla n$ maka $x \overline{\oplus}\, m \nabla y \overline{\oplus}\, n$. ■

Lemma 17. *Untuk setiap $x, y, m \in S$, jika $x\nabla y$ maka $x \overline{\otimes}\, m \nabla y \overline{\otimes}\, m$*

Bukti. Misalkan $x = \overline{(p,q)}$, $y = \overline{(r,s)}$, $m = \overline{(t,u)}$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
x \overline{\otimes}\, m &= \overline{(p,q)} \overline{\otimes} \overline{(t,u)} = \overline{(p \otimes t \oplus q \otimes u, p \otimes u \oplus q \otimes t)}\\
&= \overline{(\min\{p+t, q+u\}, \min\{p+u, q+t\})}
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
y \overline{\otimes}\, m &= \overline{(r,s)} \overline{\otimes} \overline{(t,u)} = \overline{(r \otimes t \oplus s \otimes u, r \otimes u \oplus s \otimes t)}\\
&= \overline{(\min\{r+t, s+u\}, \min\{r+u, s+t\})}.
\end{aligned}$$

Karena $x\nabla y$ maka $\min\{p,s\} = \min\{q,r\}$, sehingga diperoleh

$$\min\{p,s\} + t = \min\{q,r\} + t$$
$$\min\{p,s\} + u = \min\{q,r\} + u.$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned}
&\min\{\min\{p,s\} + t, \min\{q,r\} + u\} = \min\{\min\{p,s\} + u, \min\{q,r\} + t\}\\
&\Leftrightarrow \min\{\min\{p+t, s+t\}, \min\{q+u, r+u\}\}\\
&\qquad = \min\{\min\{p+u, s+u\}, \min\{q+t, r+t\}\}\\
&\Leftrightarrow \min\{p+t, s+t, q+u, r+u\} = \min\{p+u, s+u, q+t, r+t\}\\
&\Leftrightarrow \min\{\min\{p+t, q+u\}, \min\{r+u, s+t\}\}\\
&\qquad = \min\{\min\{p+u, q+t\}, \min\{r+t, s+u\}\}\\
&\Leftrightarrow (p \otimes t \oplus q \otimes u) \oplus (r \otimes u \oplus s \otimes t) = (p \otimes u \oplus q \otimes t) \oplus (r \otimes t \oplus s \otimes u).\\
&\Leftrightarrow \overline{(p \otimes t \oplus q \otimes u, p \otimes u \oplus q \otimes t)} \nabla \overline{(r \otimes t \oplus s \otimes u, r \otimes u \oplus s \otimes t)}\\
&\Leftrightarrow \overline{(p,q)} \overline{\otimes} \overline{(t,u)} \nabla \overline{(r,s)} \overline{\otimes} \overline{(t,u)}
\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow x \overline{\otimes}\, m \,\nabla\, y \overline{\otimes}\, m.$
Jadi, jika $x\nabla y$ maka $x \overline{\otimes}\, m \,\nabla\, y \overline{\otimes}\, m.$ ■

Persamaan linier $ax + b = c$ pada aljabar linier, dapat diubah dalam bentuk $ax = c - b$. Apabila $a \neq 0$ maka diperoleh solusi untuk x, yakni $x = \frac{c-b}{a}$. Sementara itu, persamaan linier $a \otimes x \oplus b = c$ pada aljabar min-plus $\mathbb{R}_{\min}$ cukup rumit untuk ditentukan solusinya, Hal ini dikarenakan tidak bisa merubah bentuk $a \otimes x \oplus b = c$ menjadi bentuk $a \otimes x = c \ominus b$ seperti halnya pada aljabar linier. Hal ini dikarenakan setiap elemen pada $\mathbb{R}_{\min}$, tidak memiliki invers penjumlahan, kecuali untuk elemen nol. Pada pembicaraan himpunan simetrisasi aljabar min-plus S, sudah didefinisikan operator minus $\ominus$ dan sudah ditunjukkan beberapa terminologi dan sifat berkaitan dengan himpunan simetrisasi aljabar min-plus S.

Misalkan bentuk persamaan linier $a \otimes x \oplus b = c$ pada aljabar min-plus $\mathbb{R}_{\min}$ ditinjau sebagai suatu kesetimbangan linier $a \overline{\otimes}\, x \overline{\oplus}\, b \,\nabla\, c$. Dengan menerapkan Lemma 14 diperoleh

$$a \overline{\otimes}\, x \,\nabla\, c \ominus b.$$

Jika $a \in S^{\wedge}$ maka eksistensi invers perkalian elemen a terjamin ada. Misalkan invers perkalian dari a adalah a^{-1}, maka kesetimbanga linier $a \overline{\otimes}\, x \,\nabla\, c \ominus b$ memiliki solusi

$$x\nabla\, a^{-1} \overline{\otimes}\, (c \ominus b).$$

Dengan demikian, beberapa terminologi dan sifat dasar yang diperoleh tersebut, memiliki peranan penting pada penyelesaian masalah kesetimbangan linier dalam konteks himpunan simetrisasi aljabar min-plus S.

SIMPULAN

Struktur aljabar yang terbentuk dari 〖R_min〗^⊕ pada himpunan simetrisasi aljabar min-plus merupakan suatu semilapangan. Karena aljabar min-plus R_min juga merupakan semilapangan, maka dapat dibentuk suatu korespondensi satu-satu antara 〖R_min〗^⊕ dan R_min yang mengawetkan operasi penjumlahan dan perkalian. Selanjutnya, R_min dapat ditinjau sebagai 〖R_min〗^⊕ pada konteks himpunan simetrisasi aljabar min-plus. Beberapa terminologi dan sifat dasar pada himpunan simetrisasi aljabar min-plus, memiliki kemiripan seperti halnya pada aljabar linier, dan memiliki peranan yang penting pada penyelesaian masalah kesetimbangan linier. Dengan demikian, penentuan solusi pada kesetimbangan linier dalam konteks himpunan simetrisasi aljabar min-plus dapat dilakukan seperti halnya pada persamaan linier pada aljabar linier, dengan memanfaatkan beberapa terminologi dan sifat dasar yang sudah diperoleh. Penelitian selanjutnya dapat dilakukan pada sifat substitusi elemen himpunan simetrisasi aljabar min-plus. Hal ini dikarenakan substitusi elemen tidak dapat dilakukan seperti halnya pada aljabar linier.

REFERENSI

Awallia, A. R., Siswanto, & Kurniawan, V. Y. (2020). Interval min-plus algebraic structure and matrices over interval min-plus algebra. Journal of Physics: Conference Series, 1494(1), 012010. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1494/1/012010

Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G. J., & Quadrat, J. P. (Eds.). (2001). Synchronization and linearity: An algebra for discrete event systems. Wiley.

Darbon, J., Dower, P. M., & Meng, T. (2021). Neural network architectures using min plus algebra for solving certain high dimensional optimal control problems and Hamilton-Jacobi PDEs (arXiv:2105.03336). arXiv. http://arxiv.org/abs/2105.03336

De Schutter, B. (1996). Max-algebraic system theory for discrete event systems. Katholieke Universiteit Leuven.

De Schutter, B., & De Moor, B. (2002). The QR Decomposition and the Singular Value Decomposition in the Symmetrized Max-Plus Algebra Revisited. SIAM Review, 44(3), 417–454. https://doi.org/10.1137/S00361445024039

Goto, H. (2014). Introduction to max-plus algebra. Proceedings of the 39th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation - ISSAC '14, 21–22. https://doi.org/10.1145/2608628.2627496

Gyamerah, S., Boateng, P., & Harvim, P. (2016). Max-plus Algebra and Application to Matrix Operations. British Journal of Mathematics & Computer Science, 12(3), 1–14. https://doi.org/10.9734/BJMCS/2016/21639

Hook, J. (2017). Min-plus algebraic low rank matrix approximation: A new method for revealing structure in networks (arXiv:1708.06552). arXiv. http://arxiv.org/abs/1708.06552

Liebeherr, J. (2017). Opportunistic Routing in Wireless Networks. Foundations and Trends® in Networking, 11(3–4), 139–282. https://doi.org/10.1561/1300000059

Pramesthi, S. R. P. W. (2021). Simulasi Petri Net pada Proses Produksi Susu Fermentasi. VYGOTSKY, 3(1), 25. https://doi.org/10.30736/voj.v3i1.349

Putri, R. K. (2016). PENENTUAN JALUR TERPENDEK MENGGUNAKAN ALJABAR MIN-PLUS. Studi Kasus: Distribusi Kentang Jalur Pangalengan, Bandung - Jakarta. WAHANA, 66(1), 7–15. https://doi.org/10.36456/wahana.v66i1.477

Rahayu, E. W., Siswanto, S., & Wiyono, S. B. (2021). Masalah Nilai Eigen dan Eigen Mode Matriks atas Aljabar Min-Plus. BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan, 15(4), 659–666. https://doi.org/10.30598/barekengvol15iss4pp659-666

Rosyada, S. A., Siswanto, & Kurniawan, V. Y. (2021). Bases in Min-Plus Algebra: International Conference of Mathematics and Mathematics Education (I-CMME 2021), Surakarta, Indonesia. https://doi.org/10.2991/assehr.k.211122.044

Subiono. (2015). Aljabar Min-Max Plus dan Terapannya. 173.

Suroto, S. (2022). Simetrisasi Aljabar Min-Plus. Vygotsky, 4(1), 35. https://doi.org/10.30736/voj.v4i1.444

Susilowati, E. (2018). The Comparasion Determining of Some Route of Angkot In Bandung by Using Greedy Algorithm and Min Plus Algorithm. Lontar Komputer : Jurnal Ilmiah Teknologi Informasi, 182. https://doi.org/10.24843/LKJITI.2018.v09.i03.p07

Suwanti, V., Bintoto, P., & Dinullah, R. N. I. (2017). Penerapan Min-Plus Algebra pada Penentuan Rute Tercepat Distribusi Susu. Limits: Journal of Mathematics and Its Applications, 14(2), 15. https://doi.org/10.12962/limits.v14i2.3085