KAJIAN MATEMATIS DAN SIMULASI NUMERIK TENTANG KEKONVERGENAN HARGA OPSI *CALL* TIPE EROPA MODEL BINOMIAL KE MODEL BLACK-SCHOLES

Benny Yong (benny_y@unpar.ac.id)
Jurusan Matematika FTIS Universitas Katolik Parahyangan

ABSTRAK

Terdapat beberapa metode untuk menentukan harga opsi. Dalam artikel ini dibahas dua metode, yaitu model Binomial dan model Black-Scholes. Dengan semakin meningkatnya periode waktu maka harga opsi juga akan semakin meningkat dengan perbedaan yang cukup kecil, secara analisis model binomial harga opsi akan konvergen ke model Black-Scholes.

Kata kunci: Binomial, Black-Scholes, opsi

ABSTRACT

There are many methods for finding option pricing. In this paper, two mehods will be presented, Black-Scholes model and binomial model. For the number of time periods increases to infinity and the length of each time period is infinitesimally short, option pricing from the binomial model converges to the Black-Scholes model.

Key words: binomial, Black-Scholes, option

Sebagai negara berkembang, Indonesia merupakan salah satu negara yang cukup banyak menarik minat investor, baik dalam maupun luar negeri untuk berinvestasi di berbagai sektor, salah satunya adalah sektor pasar uang. Di dalam pasar uang banyak sekali instrumen keuangan yang digunakan sebagai alat investasi, seperti saham, obligasi, opsi, *future*, *warrant,* dan *swap*. Cukup tingginya resiko dari investasi saham dan tingkat pengembalian yang kurang kompetitif dari investasi obligasi mengalihkan perhatian investor kepada investasi derivatif. Salah satu derivatif yang menarik perhatian investor adalah opsi.

Opsi adalah sertifikat yang memberikan hak (bukan kewajiban) kepada pemiliknya untuk membeli/menjual saham pada waktu tertentu dan pada harga yang tertentu pula. Ada dua jenis opsi berdasarkan haknya, yaitu opsi *call* dan opsi *put*. Opsi *call* memberikan pemiliknya untuk membeli saham dan opsi *put* memberikan hak kepada pemiliknya untuk menjual saham (Hull, 2003). Berdasarkan waktu pelaksanaanya, opsi dibagi menjadi dua, yaitu opsi tipe Amerika yang memperbolehkan pemiliknya untuk menggunakan haknya kapan saja sebelum atau pada saat jatuh tempo, sedangkan opsi tipe Eropa hanya mengijinkan pemilik opsi untuk menggunakan haknya pada saat jatuh tempo saja sesuai tanggal kesepakatan pada sertifikat tersebut (Hull, 2003). Pada makalah ini, jenis opsi yang akan dibahas adalah opsi *call* tipe Eropa.

Salah satu hal yang menarik untuk didiskusikan berkaitan dengan opsi ini adalah penentuan harga opsi. Harga opsi ini nantinya akan dijadikan sebagai premi yang harus dibayar oleh pembeli opsi ketika pertama kali sertifikat ini dibeli. Suatu cara untuk menentukan harga opsi ini adalah dengan menggunakan model Black-Scholes yang dikembangkan oleh Fischer Black, Myron Scholes dan Robert Merton. Cara lain adalah dengan menggunakan pendekatan model binomial. Pada artikel ini akan diulas kajian matematis model binomial yang telah banyak dikerjakan, lalu membandingkannya dengan hasil simulasi numerik. Hasil analisa secara matematis dan dari hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa model binomial harga opsi *call* Eropa akan konvergen ke model Black-Scholes.

MODEL BLACK-SCHOLES

Jika harga saham pada saat sertifikat opsi dibeli adalah $S(0)$ dengan harga kesepakatan (*exercise price*) adalah K, suku bunga bebas resiko per tahun adalah r_c, volatilitas harga saham per tahun adalah σ dan waktu jatuh tempo (dalam tahun) adalah T, maka model Black-Scholes untuk harga opsi *call* dinyatakan sebagai (Hull, 2003).

$$C_{BS} = S(0)N(d_1) - Ke^{-r_cT}N(d_2) \tag{1}$$

dengan

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r_c + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r_c - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

dan $N(\bullet)$ merupakan fungsi distribusi normal baku.

MODEL BINOMIAL

Jika peluang harga saham naik dinyatakan dengan p dengan faktor naik adalah u dan peluang harga saham turun dinyatakan dengan $1-p$ dengan faktor turun adalah d, maka model binomial harga opsi *call* dengan waktu jatuh tempo opsi dibagi menjadi n perioda waktu adalah (Cox, Ross, & Rubinstein, 1979)

$$C_{BN} = r_0^{-n}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}\max\left(0, u^jd^{n-j}S(0)-K\right)\right) \tag{2}$$

dengan asumsi $ud = 1$.

Misalkan a adalah suatu bilangan bulat positif terkecil dengan $a \le n$ sehingga $u^ad^{n-a}S(0) > K$. Maka untuk semua $j < a$ berlaku

$$\max\left(0, u^jd^{n-j}S(0)-K\right) = 0$$

dan untuk semua $j \ge a$ berlaku

$$\max\left(0, u^jd^{n-j}S(0)-K\right) = u^jd^{n-j}S(0)-K$$

Dengan demikian model binomial harga opsi *call* dapat dituliskan menjadi

$$C_{BN} = r_0^{-n}\left(\sum_{j=a}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}\left(u^j d^{n-j}S(0)-K\right)\right) \tag{3}$$

atau

$$C_{BN} = S(0)\left(\frac{\sum_{j=a}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}u^j d^{n-j}}{r_0^{\,n}}\right) - Kr_0^{-n}\left(\sum_{j=a}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}\right) \tag{4}$$

Perhatikan bahwa

$$\frac{p^j(1-p)^{n-j}u^j d^{n-j}}{r_0^{\,n}} = \left(\left(\frac{u}{r_0}\right)p\right)^j\left(\left(\frac{d}{r_0}\right)(1-p)\right)^{n-j}$$

Jika $p' = \left(\frac{u}{r_0}\right)p$ dan $1-p' = \left(\frac{d}{r_0}\right)(1-p)$, maka

$$\left(\left(\frac{u}{r_0}\right)p\right)^j\left(\left(\frac{d}{r_0}\right)(1-p)\right)^{n-j} = (p')^j(1-p')^{n-j}$$

Maka persamaan (4) menjadi

$$C_{BN} = S(0)\left(\sum_{j=a}^{n}\binom{n}{j}(p')^j(1-p')^{n-j}\right) - Kr_0^{-n}\left(\sum_{j=a}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}\right) \tag{5}$$

atau ditulis menjadi

$$C_{BN} = S(0)B_1 - Kr_0^{-n}B_2 \tag{6}$$

dengan B_1 dan B_2 merupakan fungsi distribusi peubah acak diskrit binomial dengan peluangnya masing-masing adalah p' dan p.

KEKONVERGENAN

Untuk menunjukkan kekonvergenan model binomial harga opsi ke model Black-Scholes, haruslah ditunjukkan bahwa B_1 dan B_2 masing-masing konvergen ke $N(d_1)$ dan $N(d_2)$. Perhatikan bahwa r_0^{-n} merupakan faktor diskonto untuk n perioda dengan tingkat pengembalian setiap perioda adalah r_0. Tingkat pengembalian setiap perioda ini dapat dikaitkan ke tingkat pengembalian tahunan untuk T tahun dengan hubungan $r_0 = r^{1/n_a}$, dengan n_a adalah jumlah perioda setiap tahun. Karena $T = \frac{n}{n_a}$, maka $r_0^n = r^{\left(\frac{1}{n_a}\right)n} = r^T$, sehingga faktor diskonto untuk T tahun adalah

$$dsto = r^{-T}$$
$$\ln(dsto) = -T\ln r$$
$$e^{\ln(dsto)} = e^{-T\ln r}$$
$$dsto = e^{-r_c T}$$

dengan $r_c = \ln r$ (Hsia, 1983).

Persamaan (6) dapat ditulis menjadi

$$C_{BN} = S(0)B_1 - Ke^{-r_c T}B_2$$

Perhatikan kembali bahwa $u^a d^{n-a} S(0) > K$.

Maka

$$a\ln u + (n-a)\ln d + \ln S(0) > \ln K$$
$$a\ln u + n\ln d - a\ln d + \ln S(0) > \ln K$$
$$a(\ln u - \ln d) > \ln K - \ln S(0) - n\ln d$$
$$a > \frac{\ln\left(\frac{K}{S(0)}\right) - n\ln d}{\ln\left(\frac{u}{d}\right)}$$

Karena a adalah suatu bilangan bulat, maka a dapat dituliskan sebagai bentuk

$$a = \frac{\ln\left(\frac{K}{S(0)}\right) - n\ln d}{\ln\left(\frac{u}{d}\right)} + \delta$$

dengan δ adalah bilangan yang ditambahkan agar a menjadi suatu bilangan bulat.

Dari teorema limit DeMoivre-Laplace yang menyatakan bahwa distribusi binomial akan konvergen ke distribusi normal jika $np \to \infty$ untuk $n \to \infty$, maka B_1 akan konvergen ke $\int_a^\infty f(j)\,dj$ dengan $f(j)$ adalah suatu fungsi padat peluang distribusi normal. Karena j bukan merupakan peubah acak normal baku, konversikan peubah acak j ini menjadi peubah acak normal baku, yaitu dengan mendefinisikan $z = \frac{j - E(j)}{\sigma_j}$ sehingga diperoleh $\int_a^\infty f(j)\,dj = \int_d^\infty f(z)\,dz$ dengan $d = \frac{j - E(j)}{\sigma_j}$. Dengan kata lain, jika $d = \frac{-(j - E(j))}{\sigma_j}$, maka B_1 konvergen ke

$\int_{a}^{\infty} f(j)\,dj = \int_{-\infty}^{d} f(z)\,dz = N(d)$. Prosedur yang sama juga dilakukan untuk B_2.

Misalkan $S(T)$ adalah harga saham pada saat jatuh tempo. Setelah n perioda dan harga saham mengalami pergerakan naik sebanyak j, perbandingan antara harga saham pada saat T dengan harga saham pada saat awal dapat dinyatakan sebagai $\frac{S(T)}{S(0)} = u^j d^{n-j}$. Maka logaritma natural dari tingkat pengembalian saham adalah

$$\ln\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right) = j\ln u + (n-j)\ln d$$

$$= j\ln\left(\frac{u}{d}\right) + n\ln d$$

Ini berarti

$$E\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right)\right) = E(j)\ln\left(\frac{u}{d}\right) + n\ln d$$

atau

$$E(j) = \frac{E\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right)\right) - n\ln d}{\ln\left(\frac{u}{d}\right)}$$

Sedangkan variansi dari logaritma natural untuk tingkat pengembalian saham adalah

$$Var\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right)\right) = \left(\ln\left(\frac{u}{d}\right)\right)^2 Var(j)$$

atau

$$Var(j) = \frac{Var\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right)\right)}{\left(\ln\left(\frac{u}{d}\right)\right)^2}$$

Ini berarti

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{Var\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right)\right)}{\left(\ln\left(\frac{u}{d}\right)\right)^2}}$$

Karena $d = \dfrac{-a + E(j)}{\sigma_j}$ dengan $a = \dfrac{\ln\left(\dfrac{K}{S(0)}\right) - n\ln d}{\ln\left(\dfrac{u}{d}\right)} + \delta$ maka

$$d = \frac{\dfrac{\ln\left(\dfrac{S(0)}{K}\right) + E\left(\ln\left(\dfrac{S(T)}{S(0)}\right)\right)}{\ln\left(\dfrac{u}{d}\right)} - \delta}{\dfrac{\sqrt{Var\left(\ln\left(\dfrac{S(T)}{S(0)}\right)\right)}}{\ln\left(\dfrac{u}{d}\right)}}$$

$$= \frac{\ln\left(\dfrac{S(0)}{K}\right) + E\left(\ln\left(\dfrac{S(T)}{S(0)}\right)\right) - \delta\ln\left(\dfrac{u}{d}\right)}{\sqrt{Var\left(\ln\left(\dfrac{S(T)}{S(0)}\right)\right)}}$$

Karena $Var(j) = np(1-p)$, dengan p adalah peluang sukses, maka

$$d = \frac{\ln\left(\dfrac{S(0)}{K}\right) + E\left(\ln\left(\dfrac{S(T)}{S(0)}\right)\right)}{\sqrt{Var\left(\ln\left(\dfrac{S(T)}{S(0)}\right)\right)}} - \frac{\delta}{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}}$$

Jika n menuju tak terhingga, maka suku terakhir dari persamaan ini menuju nol. Karena $Var\left(\ln\left(\dfrac{S(T)}{S(0)}\right)\right) = \sigma^2 T$, maka

$$d = \frac{\ln\left(\dfrac{S(0)}{K}\right) + E\left(\ln\left(\dfrac{S(T)}{S(0)}\right)\right)}{\sigma\sqrt{T}}$$

Persamaan ini diperlukan untuk menyamakan d_1 dan d_2 seperti yang didefinisikan oleh model Black-Scholes. Ini berarti harus ditunjukkan $E\left(\ln\left(\dfrac{S(T)}{S(0)}\right)\right) = \left(r_c + \dfrac{1}{2}\sigma^2\right)T$, jika peluangnya p'

dan $E\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right)\right)=\left(r_c-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T$, jika peluangnya p . Untuk hal ini, perhatikan kembali $p'=\left(\frac{u}{r_0}\right)p=\frac{\left(\frac{u}{r_0}\right)(r_0 - d)}{(u-d)}$, maka $r_0=\left(\frac{p'}{u}+\frac{(1- p')}{d}\right)^{-1}$. Dengan mengingat kembali bahwa $r_0^n=r^T$, maka $r_0^n=r^T=\left(\frac{p'}{u}+\frac{(1- p')}{d}\right)^{-n}$.

Tulis

$$\frac{S(0)}{S(T)}=\left(\frac{S_0}{S_1}\right)\left(\frac{S_1}{S_2}\right)\left(\frac{S_2}{S_3}\right)\cdots\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{S_{i-1}}{S_i},$$

dengan $S(0)=S_0$. Maka

$$E\left(\frac{S(0)}{S(T)}\right)=\left(E\prod_{i=1}^{n}\frac{S_{i-1}}{S_i}\right)=\prod_{i=1}^{n}E\left(\frac{S_{i-1}}{S_i}\right)$$

Karena peluang sukses untuk B_1 adalah p' dan $S_i=S_{i-1}u$ dengan peluang p' dan $S_i=S_{i-1}d$ dengan peluang $1-p'$, maka

$$E\left(\frac{S_{i-1}}{S_i}\right)=\frac{p'}{u}+\frac{(1- p')}{d}$$

Sehingga

$$E\left(\frac{S(0)}{S(T)}\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p'}{u}+\frac{(1- p')}{d}\right)$$

$$=\left(\frac{p'}{u}+\frac{(1- p')}{d}\right)^{n}$$

atau

$$\left(E\left(\frac{S(0)}{S(T)}\right)\right)^{-1}=\left(\frac{p'}{u}+\frac{(1- p')}{d}\right)^{-n}$$

Karena $r^T=\left(\frac{p'}{u}+\frac{(1- p')}{d}\right)^{-n}$ maka $r^T=E\left(\frac{S(0)}{S(T)}\right)^{-1}$, atau $r^{-T}=E\left(\frac{S(0)}{S(T)}\right)$.

Maka

$$-T\ln r=\ln\left(E\left(\frac{S(0)}{S(T)}\right)\right)$$

Karena $\frac{S(T)}{S(0)}$ berdistribusi lognormal, maka invers dari distribusi lognormal juga berdistribusi lognormal, jadi $\frac{S(0)}{S(T)}$ juga berdistribusi lognormal. Karena $\frac{S(T)}{S(0)} = e^x$, maka $\ln\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right) = x$.
Karena untuk setiap peubah acak X yang berdistribusi lognormal, berlaku $\ln\left(E(X)\right) = E\left(\ln(X)\right) + \frac{1}{2}Var\left(\ln(X)\right)$, maka $\ln\left(E(x)\right) = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2$ dengan $\mu = E(\ln X)$ dan $\sigma^2 = Var\left(\ln(X)\right)$. Karena $-T\ln r = \ln\left(E\left(\frac{S(0)}{S(T)}\right)\right)$, maka

$$
\begin{aligned}
-T\ln r &= E\left(\ln\left(\frac{S(0)}{S(T)}\right)\right) + \frac{1}{2}Var\left(\ln\left(\frac{S(0)}{S(T)}\right)\right) \\
&= -E\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right)\right) + \frac{1}{2}Var\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Sehingga

$$E\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right)\right) = T\ln r + \frac{1}{2}Var\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right)\right)$$

Karena $Var\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right)\right) = \sigma^2 T$, maka $E\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right)\right) = \left(\ln r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T$. Karena $\ln r = r_c$, maka jelaslah bahwa B_1 akan konvergen ke $N(d_1)$.

Untuk menunjukkan B_2 konvergen ke $N(d_2)$, gunakan kembali $p = \frac{r_0 - d}{u - d}$ yang diperoleh dari menyamakan ekspektasi harga saham pada model diskret dan kontinu. Maka $r_0 = pu + (1-p)d$.
Karena $S_i = S_{i-1}u$ dengan peluang p dan $S_i = S_{i-1}d$ dengan peluang $1-p$, maka $E\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) = pu + (1-p)d = r_0$. Karena

$$
\begin{aligned}
E\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right) &= \left(E\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} E\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n}\left(pu + (1-p)d\right)
\end{aligned}
$$

$$= \left(pu + (1 - p)d \right)^n$$
$$= r_0^{\;n}$$
$$= r^T$$

Maka

$$\ln\left(E\left(\frac{S(T)}{S(0)} \right) \right) = T \ln r$$

Kemudian dengan menggunakan

$$\ln\left(E\left(\frac{S(T)}{S(0)} \right) \right) = E\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S(0)} \right) \right) + \frac{1}{2} Var\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S(0)} \right) \right)$$

diperoleh

$$E\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S(0)} \right) \right) = T \ln r - \frac{1}{2} Var\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S(0)} \right) \right)$$

Karena $Var\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S(0)} \right) \right) = \sigma^2 T$, maka $E\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S(0)} \right) \right) = \left(\ln r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T$

Karena $\ln r = r_c$, maka jelaslah bahwa B_2 akan konvergen ke $N(d_2)$. Kekonvergenan model binomial harga opsi ini ke model Black-Scholes tidak akan terjadi jika peluang per periodanya menuju nol (Hsia, 1983).

SIMULASI

Pada bagian ini diberikan hasil simulasi numerik dengan algoritma metoda binomial pada Seydel (2002) untuk penentuan harga opsi *call* Eropa dengan data masukan adalah $r_c = 0,06, \sigma = 0,3, S(0) = 5, K = 10$ dan $T = 1$. Hasil simulasi dengan menggunakan perangkat lunak MATLAB untuk data masukan ini disajikan pada Tabel 1.

Terlihat dari Tabel 1 bahwa dengan semakin meningkatnya perioda waktu maka harga opsi *call* Eropa juga akan semakin meningkat dengan perbedaan yang cukup kecil dan harga opsi *call* Eropa yang dihitung dengan menggunakan model binomial ini akan mendekati harga opsi *call* Eropa yang dihitung dengan menggunakan model Black-Scholes.

Tabel 1. Harga Opsi C*all* Eropa dengan Banyaknya Perioda Waktu yang Bervariasi

Banyaknya perioda waktu (n)	Harga opsi *call* Eropa
8	0,0074
16	0,0116
32	0,0122
64	0,0123
128	0,0124
256	0,0127
Black-Scholes	0,0128

PENUTUP

Opsi merupakan instrumen keuangan yang cukup menarik minat investor terutama dari segi modal yang kecil dan kerugian yang terbatas. Paparan dalam artikel ini telah memperlihatkan bahwa secara analitis model binomial harga opsi akan konvergen ke model Black-Scholes. Hal ini dipertegas dari hasil simulasi dengan semakin meningkatnya perioda waktu. Masih terdapat beberapa metoda yang bisa digunakan untuk menentukan harga opsi ini, antara lain dengan menggunakan metoda beda hingga, elemen hingga dan simulasi Monte Carlo. Hasil dari metoda-metoda ini dapat dibandingkan dengan hasil yang telah diperoleh dari kedua metoda yang telah dibahas dalam artikel ini.

REFERENSI

Cox, J.C, Ross, S. A, & Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics 7*, 229-263.

Hsia, C. (1983). On binomial option pricing. *The Journal of Financial Research*. 6, 41-46.

Hull, J.C. (2003). *Options, futures and other derivatives*. New Jersey: Prentice Hall.

Seydel, R. (2002). *Tools for computational finance*. New York: Springer.