HUBUNGAN MATRIKS AB DAN BA PADA STRUKTUR JORDAN NILPOTEN

Sondang Purnamasari Pakpahan (sondang@upbjj-ut.ac.id)
UPBJJ-UT Medan

Elvina Herawaty
FMIPA Matematika Universitas Sumatera Utara

ABSTRACT

In this paper, we give another proof about the relationship between AB and BA with eigenvalue zero that reduced by structure Jordan for nilpoten matrix

Keywords : eigenvalue, nilpotent matrix, structure Jordan

Perkalian dua matriks kuadrat *AB* dan *BA* tidak selalu komutatif, tetapi bukan berarti *AB* dan *BA* tidak mempunyai hubungan satu dengan yang lainnya. Salah satu hubungan yang diperoleh melalui

trace (AB) = trace(BA)

Hubungan matriks *AB* dan *BA* yang lain diperlihatkan oleh Flander (1951), melalui struktur Jordan *AB* dan *BA* sebagai berikut:

1. Untuk nilai eigen tak nol, struktur Jordan *AB* sama dengan struktur Jordan *BA*
2. Untuk nilai eigen nol jika $m_1 \geq m_2 \geq ... \geq m_q \geq 1$ dan $m_1 + m_2 + ... + m_q = m$ ukuran-ukuran blok Jordan *AB* dan $n_1 \geq n_2 \geq ... \geq n_p \geq 1$ dengan $n_1 + n_2 + ... + n_p = n$ ukuran-ukuran blok Jordan *BA*, maka $| n_i - m_i | \leq 1$; yaitu struktur Jordan keduanya akan naik sebesar satu atau relatif sama.

Hubungan matrik AB dan BA juga diperlihatkan Flander (1951) dengan menggunakan konsep *pembagi nol atas lapangan* secara umum, yang relatif abstrak. Thomson (1968) membuktikan pernyataan Flander dengan menggunakan konsep rank dan Parker dan Mitchell (1952) membuktikannya dengan menggunakan konsep *variansi*, tetapi keduanya tidak memberikan bukti yang transparan.

Dalam teori matriks, struktur Jordan dari suatu matriks nilpoten mempunyai bentuk yang khas, yaitu blok-blok Jordannya berbentuk matriks nilpoten dengan entri satu pada superdiagonal dan entri nol pada posisi lainnya, dan matriks nilpoten mempunyai nilai eigen nol (Horn & Johnson, 1985).

Melihat pernyataan yang diberikan oleh Horn dan Johnson (1985) untuk matrik nilpoten, maka timbul pertanyaan, apakah pernyataan Flender (1951) yang kedua dapat dibuktikan tanpa menggunakan konsep pembagi nol dan lebih transparan?

Tulisan ini membahas cara pembuktian yang berbeda tentang hubungan struktur Jordan antara perkalian matriks *AB* dan *BA* hanya pada matriks nilpoten.

KONSEP DASAR

Struktur Jordan untuk matriks nilpoten diberikan oleh Horn dan Johnson (1985) sebagai berikut :

Setiap matriks nilpoten $L_{n \times n}$ berindeks k similar ke bentuk matriks dengan blok- blok diagonal N = *diag* $\left(J_{n1}, J_{n2}, ..., J_{np}\right)$, yaitu ada matriks *invertible* P sehingga berlaku

$$P^{-1}AP = N = \begin{bmatrix} J_{n_1} & 0 & & 0 \\ 0 & J_{n_2} & & 0 \\ & & 0 & \\ 0 & 0 & & J_{n_p} \end{bmatrix} \text{ dengan setiap blok } J_{ni} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ : & : & & & : \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dan $n_1 \geq n_2 \geq ... \geq n_p \geq 1$ dengan $n_1 + n_2 + ... + n_p = n$.

Dalam hal ini berlaku :

1. Jumlah blok di N sebanyak n_p = dim N(L)
2. Ukuran blok Jordan terbesar di N adalah k x k
3. Jumlah blok yang berukuran i x i di ditentukan oleh $r_{i-1} - 2r_i + r_{i+1}$ dengan r_i = rank (L^i)

Contoh : Diberikan matriks L sebagai berikut

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ maka } L \text{ adalah matriks nilpoten berindeks 3.}$$

Banyaknya blok N adalah dim N (L) = 6 – rank (L) = 3.

Dengan r_1 = rank (L) = 3 r_2 = rank (L^2) = 1 dan r_3 = rank (L^3) = 0.

Banyak blok berukuran 3 x 3 = $r_2 - 2r_3 + r_4$ = 1, blok berukuran 2 x 2 = $r_1 - 2r_2 + r_3$ = 1, banyak blok berukuran 1 x 1 = $r_0 - 2r_1 + r_2$ = 0.

Oleh karena itu blok Jordan dari *L* adalah *N* = $\left(\begin{array}{ccc|cc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Dari matriks nilpoten $L_{n\,x\,n}$ berindeks *k* similar ke bentuk matriks dengan blok- blok diagonal *N* = *diag* ($\left(J_{n1}, J_{n2}, ..., J_{np}\right)$ untuk $n_1 \geq n_2 \geq ... \geq n_p \geq 1$, $n_1 + n_2 + ... + n_p = n$ diperoleh matriks *invertible P*. Kemudian dibuat matrik $P^1{}_{mxm}$ untuk *m* = *n* + *k* sebagai berikut

$$P^1 \;=\; P \oplus I \;=\; \left[\begin{array}{c|c} P_{nxn} & 0_{nxk} \\ \hline 0_{kxn} & I_{kxk} \end{array}\right]$$

Dalam hal ini matriks $P^{\,1}$ juga *invertible* dengan $(P^{\,1})^{-1}$ = $\left[\begin{array}{c|c} (P_{nxn})^{-1} & 0_{nxk} \\ \hline 0_{kxn} & I_{kxk} \end{array}\right]$.

Jika diberikan $D = \left[\begin{array}{c|c} L_{nxn} & X_{mxk} \\ \hline 0_{kxn} & 0_{kxk} \end{array}\right]$, maka

$$(P')^{-1}\, D\, P = \left(\begin{array}{c|c} P^{-1} & 0 \\ \hline 0 & I_k \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} L & X \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & I_k \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} P^{-1} A\, P & P^{-1} X \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \;=\; \left(\begin{array}{cc|c} J_{n_1} & 0 & \\ 0 & & P^{-1} X \\ 0 & J_{n_p} & \\ \hline 0 & & 0 \end{array}\right) \text{(*)}$$

Karena *D* berupa matriks nilpoten berarti similar kebentuk matriks blok Jordan, yaitu ada matriks *invertible Q* sehingga Q^{-1} *D Q* = $\begin{pmatrix} J_{m_1} & & \\ & 0 & \\ & & J_{mq} \end{pmatrix}$ (**)

Dengan $m_1 \geq m_2 \geq ... \geq m_p \geq 1$, $m_1 + m_2 + ... + m_q = m$

Agar (*) dan (**) mempunyai bentuk yang sama diperlukan pengertian berikut

1) Jika bentuk *D* sebagai berikut

$D = \left(\begin{array}{cc|c} J_{n_1} & 0 & \\ 0 & & X \\ 0 & J_{n_p} & \\ \hline 0 & & 0 \end{array}\right)$ dan dipilih keberadaan *P* = $\left(\begin{array}{cc|c} J_{n_1} & 0 & -W_1 \\ 0 & & \\ 0 & J_{n_p} & -W_p \\ \hline 0 & & I_k \end{array}\right)$ dengan

$W_i = J_{n_i}{}^T X_i$. Dalam hal ini jelas *P invertibel* dan berlaku $P^{-1} D P = \left(\begin{array}{cc|c} J_{n_1} & 0 & -Y_1 \\ 0 & & \\ 0 & J_{n_p} & -Y_p \\ \hline 0 & & 0 \end{array}\right)$

dengan $Y_i = X_i -\; J_{n_i} J_{n_i}{}^T$

Karena $J_{n_i} J_{n_i}^{\ T} = I_{n_i - 1} \oplus 0$ maka setiap blok n_i dari matriks $P^{-1}DP$ mempunyai (n_i – 1) baris pertama bernilai nol dan pada baris ke-n_i entrinya sama seperti x_i .

2) Pada langkah ini setiap blok n_i ambil entri pada baris ke- i, kemudian bentuk matriks R , yang berarti berukuran p x k.

Matriks $R = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & x_{p2} & \dots & x_{pk} \end{pmatrix}$

Pada matriks R ini dilakukan reduksi baris tanpa melakukan pertukaran baris dan kemudian reduksi kolom, sehingga diperoleh matriks R ‘ yang berbentuk 0-1 dengan 1 muncul paling banyak satu pada setiap baris dan kolom.
Buat matriks M sebagai berikut

$$M = \left(\begin{array}{cccc|cccc} J_{n_1} & & & & X_{11} & \cdots & X_{1q} & \\ & J_{n_2} & & & X_{21} & \cdots & X_{2q} & \\ & & \ddots & & \vdots & & \vdots & \\ & & & J_{n_p} & X_{p1} & \cdots & X_{pq} & \\ \hline & & & & J_{m_1} & & & \\ & & 0 & & & J_{m_2} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & J_{m_q} \end{array}\right)$$

3) Pada matriks M dilakukan
   a) menghapus blok baris ke-i dari sebelah atas dan blok kolom ke-i dari sebelah kiri
   b) menghapus blok baris ke-j dari sebelah bawah dan blok kolom ke-j dari sebelah kanan.

Maka dari blok entri yang dihapus diperoleh matriks $\begin{pmatrix} J_{n_{ii}} & X_{ij} \\ 0 & J_{m_j} \end{pmatrix}$ dan M_i merupakan submatriks dari M setelah proses pengeliminasian.

Jika X_{ij} = [0, 0, ... , 1] ^{t} dan $J_{m_j} = J_1$ maka $\begin{pmatrix} J_{n_{ii}} & X_{ij} \\ 0 & J_{m_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{n_i} & 1 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix} \cong J_{n_1 + 1_i}$

Jika X_{ij} = [0, 0, ... , 0] ^{t} maka $\begin{pmatrix} J_{n_{ii}} & X_{ij} \\ 0 & J_{1_j} \end{pmatrix} \cong J_{n_i} \oplus J_1$. Artinya jika

$\begin{pmatrix} J_{n_{ii}} & X_{ij} \\ 0 & J_{m_j} \end{pmatrix} \oplus M_1 = \left(\begin{array}{cc|c} J_{n_i} & X_{ij} & 0 \\ 0 & J_{m_j} & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & M_1 \end{array}\right)$ maka M similar secara permutasi dengan

$$\left(\begin{array}{cc|c} J_{n_i} & X_{ij} & \\ 0 & J_{m_j} & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & M_1 \end{array}\right)$$

Dari 3 langkah observasi dapat dibuat lemma berikut

Lemma :

Jika A matriks nilopoten n x n dengan blok Jordan $n_1 \geq n_2 \geq ... \geq n_p \geq 1$ untuk $n_1 + n_2 + ... + n_p = n$ dan matriks D = $\begin{pmatrix} L & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilpoten berukuran m x m dengan blok-blok Jordan $m_1 \geq m_2 \geq ... \geq m_q \geq 1$ untuk $m_1 + m_2 + ... + m_q = m$ maka q ≥ p dan 1) Blok m_i = 1 untuk $p+1 \leq i \leq q$ 2) $0 \leq m_i - n_i \leq 1$ untuk *i* = 1, 2, … , *p*

Untuk memperlihatkan hubungan struktur Jordan matriks *AB* yang berukuran *m* x *m* dengan struktur Jordan *BA* yang berukuran *n* x *n* cukup diasumsikan $A = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ yang dibawa kebentuk blok matriks yang bersesuaian.

diperoleh $AB = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & O \end{pmatrix} \quad dan \quad BA = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix}$.

Untuk $AB = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & O \end{pmatrix}$ dengan *det* (*AB* - λ I) = 0 memberikan nilai eigen $\lambda = 0 \; atau \lambda \neq 0$.

Untuk $\lambda = 0$ maka cukup diasumsikan B_{11} berbentuk matriks ***nilpoten*****.** Jika diaplikasikan lemma di atas , berarti struktur Jordan *AB* sama dengan *BA* atau naik sebesar satu .

PENUTUP

Hubungan struktur Jordan antara perkalian matriks *AB* dan *BA* untuk nilai eigen 0 relatif sama atau berbeda sebesar satu ukuran, dapat diperlihatkan tanpa menggunakan konsep abstrak hanya pada matriks nilpoten. Untuk matriks secara umum bukti di atas tidak berlaku.

REFERENSI

Flandes, H. (1951). Elementary divisors of *AB* and *BA. Proc. Amer. Math. Soc,* 2, 871-874

Horn, R.A. & Johnson, C.R. (1985). *Matrix analysis.* New York: Cambridge Univesity Press.

Thompson, R.C. (1968). On the Matrices *AB* and *BA*. *Linear Algebra Apl,* 1, 43-58

Parker, W.V., & Mitchell (1952). Elementary divisors of certain matrices. *Duke Math J*, 19, 483-485