PERHITUNGAN INTEGRAL FUNGSI REAL MENGGUNAKAN TEKNIK RESIDU

Warsito (warsito@mail.ut.ac.id)
Universitas Terbuka

ABSTRACT

A function $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$ *is bounded and continuous in* $(-\infty, \infty)$ *, so the improper integral of rational real function* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ *should be have a value according to Integrability Theorem. But, how to find it? Working with the real functions it will not esay, because it is difficult to find antiderivative of* $f(x)$ *. This paper will discuss how to solve the value of the improper integral of rational real function* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ *by using residu of complex function.*

Keywords: complex function, integral, real function, residu.

Fungsi $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$ merupakan fungsi real yang yang terbatas dan kontinu pada $-\infty < x < \infty$, sehingga mestinya $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ ada nilainya atau $f(x)$ terintegralkan. Dalam kenyataannya tidak mudah menemukan $F(x)$ yaitu anti turunan $f(x)$ ataupun dengan menggunakan teknik integral yang lain, sehingga $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ dapat dihitung dalam sistem bilangan atau fungsi real.

Sistem bilangan real merupakan subbagian dari sistem bilangan kompleks, jadi masih ada harapan integral fungsi real tesebut dapat dihitung dengan sistem bilangan atau fungsi kompleks.

Tulisan ini bertujuan menghitung integral fungsi real yang tidak dapat diselesaikan dalam sistem bilangan real tersebut dengan teknik residu dalam sistem bilangan kompleks.

METODOLOGI

Bahasan makalah ini secara berurutan diawali dengan teori residu, cara menghitung residu, penggunaan residu untuk menghitung integral fungsi kompleks, kaitan antara integral fungsi real dan integral fungsi kompleks dan terakhir penggunaan residu untuk menghitung integral fungsi real.

Teori Residu

Sebelum sampai pada teori residu akan disajikan beberapa definisi terlebih dahulu untuk mendukung teori residu tersebut.

Definisi 1. Fungsi $w = f(z)$ dikatakan *analitik* di z_0, jika $f'(z)$ ada di z_0 dan ada pada suatu lingkungan dari z_0.

Definisi 2. Titik $z = a$ disebut *titik singular* dari fungsi $f(z)$, jika $f(z)$ tidak dapat diturunkan di $z = a$, tetapi setiap lingkungan dari a memuat titik di mana $f(z)$ dapat diturunkan.

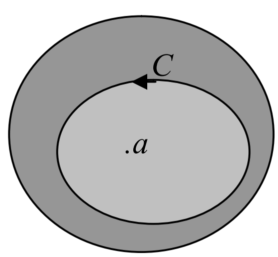
Ada dua macam titik singular yaitu titik singular *tak terpencil* dan titik singular *terpencil*. Titik a disebut singular *tak terpencil* jika dan hanya jika setiap lingkungan a memuat paling sedikit satu titik singular selain a. Titik singular tak terpencil tidak dibahas lebih lanjut karena kurang relevan dengan tulisan ini. Sedangkan, titik a disebut titik singular *terpencil* jika dan hanya jika ada lingkungan a yang tanpa a itu sendiri $f(z)$ analitik. Ada tiga macam atau kasus *titik singular terpencil*, yaitu pertama $f(z)$ tidak memiliki pangkat negatif $(x-a)$, kedua $f(z)$ memiliki berhingga pangkat negatif $(x-a)$ dan ketiga $f(z)$ memiliki tak berhingga pangkat negatif $(x-a)$. Selanjutnya yang akan dibahas hanya titik singular terpencil kasus kedua yang akan berkaitan dengan titik pole.

Definisi 3. Jika $f(z)$ memiliki berhingga pangkat negatif $(z-a)$:

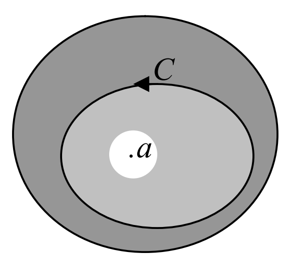
$$f(z) = \frac{c_m}{(z-a)^m} + \frac{c_{m-1}}{(z-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{c}{(z-a)} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n \ ; \ c_m \neq 0$$

maka titik a disebut *titik pole* derajat m. Untuk *m* = 1, titik pole yang berkaitan disebut titik *pole sederhana*.

Apabila $f(z)$ analitik pada suatu lingkungan $z = a$ maka $\int_C f(z)dz = 0$ untuk setiap lengkungan tertutup *C* di dalam lingkungan *a* tersebut , Gambar 1. Tetapi, apabila $f(z)$ memiliki titik pole di $z = a$ yang berada pada interior *C* maka pada umumnya nilai $\int_C f(z)dz \neq 0$, Gambar 2.



Gambar 1.



Gambar 2.

Fungsi $f(z)$ memiliki titik pole di $z=a$ maka ia dapat diuraikan ke dalam deret Laurent

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-a)^n+\frac{c_1}{z-a}+\frac{c_2}{(z-a)^2}+...$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{(z-a)^n}$$

yang konvergen pada $0<|z-a|<R$ dimana *R* jarak titik *a* ke titik singular $f(z)$ terdekat

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-a)^{n-1}}dz\,.$$

Koefisien $\frac{1}{z-a}$ adalah $c_1=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz$ (1)

menurut Teorema Laurent dengan pengintegralan melawan arah jarum jam pada lengkungan *C*. Bilangan c_1 disebut residu $f(z)$ di $z=a$ dan ditulis sebagai

$$\operatorname{Re}s[f,a]=c_1 \qquad (2)$$

Sehingga dari (1) dan (2), kita dapat menghitung nilai integral dengan cara menentukan nilai residu, yaitu

$$\int_C f(z)dz=2\pi i\operatorname{Re}s[f,a]$$

Menguraikan suatu fungsi ke dalam deret Laurent pada umumnya sukar, sehingga nilai residu $\operatorname{Re}s[f,a]=c_1$ yaitu koefisien $\frac{1}{z-a}$ juga tidak mudah ditentukan. Oleh karena itu untuk menghitung nilai residu $\operatorname{Re}s[f,a]$ harus dicari dengan cara lain.

Menghitung Residu

a. Di Pole Sederhana (derajat 1) di $z=a$

Misal $f(z)$ memiliki titik pole derajat 1 di $z=a$, sehingga dapat diuraikan menjadi deret Laurent

$$f(z)=\frac{c_1}{(z-a)}+b_0+b_1(z-a)+b_2(z-a)^2+... \quad ;\ (0<|z-a|<R\ ;\ c_1\neq 0)$$

Kemudian, kedua ruas dikalikan dengan (*z* – *a*) maka diperoleh

$$(z-a)f(z)=(z-a)\left\{\frac{c_1}{(z-a)}+b_0+b_1(z-a)+b_2(z-a)^2+...\right\}$$
$$=c_1+(z-a)\left\{b_0+b_1(z-a)+b_2(z-a)^2+...\right\}$$

Apabila *z* menuju *a*, maka $(z-a)\left\{b_0+b_1(z-a)+b_2(z-a)^2+...\right\}=0$ sehingga diperoleh

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=c_1=\operatorname{Re}s[f,a]$$

atau dapat ditulis sebagai

$$\operatorname{Re}s[f,a]=\lim_{z\to a}(z-a)f(z) \qquad (3)$$

Sebagai ilustrasi perhitungan nilai residu pada pole sederhana, misalnya menghitung nilai residu $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-3)}$ di titik pole $z=3$ berikut ini.

$f(z)=\dfrac{z^2}{(z-3)}$ mempunyai titik pole di $z=3$ berderajat 1 sehingga menurut persamaan (3) kita dapat menghitung,

$$\operatorname{Re}s[f,3]=\lim_{z\to 3}(z-3)f(z)=\lim_{z\to 3}(z-3)\left(\frac{z^2}{(z-3)}\right)=\lim_{z\to 3}z^2=9$$

Dengan demikian nilai residu $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-3)}$ ditik titik pole $z=3$ sebesar 9.

b. Di Pole Derajat *m*

Misal $f(z)$ memiliki pole di $z=a$ berderajat *m*, sehingga uraian deret Laurent $f(z)$ adalah

$$f(z)=\frac{c_m}{(z-a)^m}+\frac{c_{m-1}}{(z-a)^{m-1}}+...+\frac{c_1}{(z-a)^1}+b_0+b_1(z-a)^1+...\ ;\ c_m\neq 0 \tag{4}$$

yang konvergen pada suatu lingkungan $z=a$ kecuali di *a* sendiri. Apabila kedua ruas pada persamaan (4) dikalikan $(z-a)^m$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}(z-a)^m f(z)&=c_m+c_{m-1}(z-a)^m+...+c_1(z-a)^{m-1}+b_0(z-a)^m+b_1(z-a)^{m+1}+...\\&=g(z)\end{aligned}$$

Residu $f(z)$ yaitu c_1 pada uraian deret Taylor fungsi $g(z)=(z-a)^m f(z)$ merupakan koefisien dari $(z-a)^{m-1}$. Menurut Teorema Taylor, $c_1=\dfrac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$. Jadi, apabila $f(z)$ memiliki titik pole di $z=a$ berderajat *m* maka residunya

$$\operatorname{Re}s[f,a]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\left\{\frac{d^{m-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right]\right\} \tag{5}$$

Sebagai ilustrasi berikut ini akan disajikan perhitungan residu pada pole berderajat 3.

Fungsi $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)^3(z+1)}$ memiliki pole di $z=1$ derajat 3, sehingga menurut persamaan (5) dapat dihitung,

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}s[f,1]&=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 1}\left\{\frac{d^{3-1}}{dz^{3-1}}\left[(z-a)^3 f(z)\right]\right\}\\&=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\left\{\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-1)^3\frac{z}{(z-1)^3(z+1)}\right]\right\}\\&=\frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\left\{\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{z}{(z+1)}\right]\right\}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{(z+1)} \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz} \left(\frac{(1)(z+1) - z(1)}{(z+1)^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{(z+1)^2} \right) = \frac{1}{2} \lim_{z \to 1} \left(\frac{-2}{(z+1)^3} \right) = -\frac{1}{8}$$

Jadi nilai residu $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)^3(z+1)}$ di titik pole $z = 1$ sebesar $-\dfrac{1}{8}$.

Menghitung Integral

Bagian berikut ini akan menjelaskan perhitungan integral fungsi real dengan residu. Karena perhitungan integral didasari integral fungsi kompleks, maka terlebih dahulu akan dibahas integral fungsi kompleks dengan menggunakan residu.

a. Integral Fungsi Kompleks.

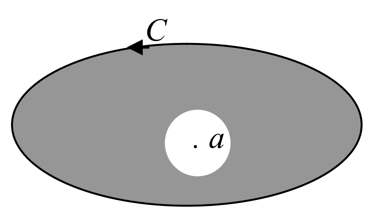
Pole Derajat 1 (sederhana)

Fungsi $f(z)$ analitik kecuali di titik $z = a$, Gambar 3, ia memiliki residu

$\operatorname{Re} s[f, a] = c_1 = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_C f(z) dz$ menurut Teorema Laurent, sehingga persamaan ini dapat diubah

menjadi $\displaystyle\int_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Re} s[f, a]$ (6)

dimana $\operatorname{Re} s[f, a]$ dihitung menggunakan persamaan (3).



Gambar 3

Selanjutnya akan dibahas contoh menghitung nilai $\displaystyle\int_C \frac{1}{z-3} dz$ dengan $C : |z-2| = 2$,

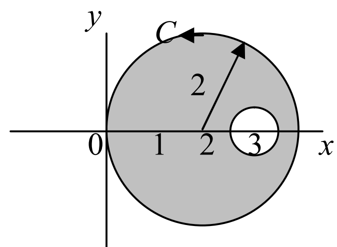
seperti yang terlihat pada Gambar 4.

$f(z) = \dfrac{1}{z-3}$ mempunyai pole di $z = 3$ derajat 1, maka menurut persamaan (3)

$$\operatorname{Re} s[f, 3] = \lim_{z \to 3} (z-3) \frac{1}{(z-3)} = \lim_{z \to 3} 1 = 1$$

Jadi, menurut persamaan (6), $\int_C \frac{1}{z-3} dz = (2\pi i) \operatorname{Re} s[f,3] = (2\pi i)(1) = 2\pi i$

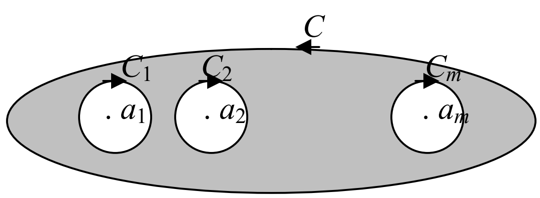
Dengan demikian nilai $\int_C \frac{1}{z-3} dz$ dengan $C : |z-2| = 2$ adalah $2\pi i$.



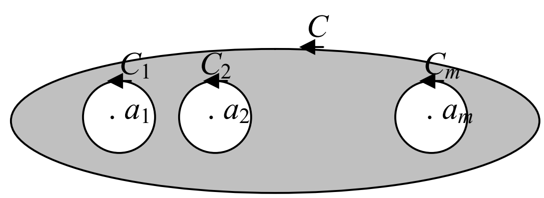
Gambar 4

Pole Derajat m

Misal $f(z)$ analitik di dalam lengkungan *C* dan pada *C* kecuali pada $a_1, a_2, ..., a_m$ di dalam *C*. Menurut Teorema Cauchy maka $\int_C f(z)dz + \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + ... + \int_{C_m} f(z)dz = 0$; *C melawan arah* jarum jam sedangkan C_1 , C_2 ,...., C_m *searah* jarum jam, Gambar 5.



Gambar 5



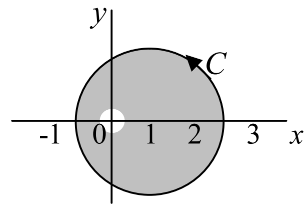
Gambar 6

Apabila *C melawan arah* jarum jam dan C_1 , C_2 ,...., C_n juga *melawan arah* jarum jam, Gambar 6, maka bentuk integral menjadi $\int_C f(z)dz - \int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz - ... - \int_{C_m} f(z)dz = 0$

Atau dapat ditulis

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + ... + \int_{C_m} f(z)dz \\ &= 2\pi i \operatorname{Re} s[f,a_1] + 2\pi i \operatorname{Re} s[f,a_2] + ... + 2\pi i \operatorname{Re} s[f,a_m]\end{aligned}$$

Jadi, $$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Re} s[f,a_k] \tag{7}$$



Gambar 7

Sebagai contoh, akan dihitung nilai $\int_C \frac{z-1}{z^3(z^2-1)}dz$ dengan $C:|z-1|<\frac{3}{2}$, lihat Gambar 7.

$$f(z)=\frac{z-1}{z^3(z^2-1)}=\frac{z-1}{z^3(z+1)(z-1)}=\frac{1}{z^3(z+1)}$$

Sehingga fungsi $f(z)$ mempunyai titik pole di $z=0$ derajat 3 dan di $z=-1$ derajat 1.

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}s[f,0] &= \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^{3-1}}{dz^{3-1}}\left[z^3\,\frac{1}{z^3(z+1)}\right] \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{z+1}\right] \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{-1}{(z+1)^2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left[\frac{2(z+1)}{(z+1)^4}\right]=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left[\frac{2}{(z+1)^2}\right]=1\end{aligned}$$

Titik pole $z=-1$ terletak diluar *C* (batas integrasi), Gambar 7, maka $\operatorname{Re}s[f,-1)$ tidak perlu dihitung karena tidak digunakan untuk menghitung nilai integral.

Jadi, $\int_C \frac{z-1}{z^3(z^2-1)}dz = 2\pi i \operatorname{Re}s[f,0]=2\pi i(1)=2\pi i$

Integral Fungsi Real

Selanjutnya akan dibahas integral tak wajar fungsi rasional real dengan derajat penyebut minimal 2 lebih besar dari derajat pembilang yaitu yang berkaitan dengan permasalahan tulisan ini.

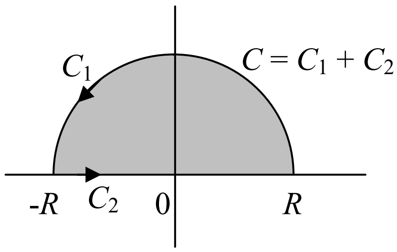
Bentuk integral tak wajar *fungsi rasional real* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ dapat ditulis sebagai

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{\infty} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} f(x)dx+\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} f(x)dx$$

Apabila nilai limit ruas kanan masing-masing ada maka,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx \tag{8}$$

(fungsi rasional disini derajat penyebut sekurang-kurangnya harus 2 lebih besar dari derajat pembilang).



Gambar 7

Selanjutnya tinjau integral fungsi kompleks berikut,

$\int_C f(z)dz$; $C = C_1 + C_2$ dengan :

- C_1 = setengah lingkaran
- $C_2 = -R \le x \le R$

seperti terlihat pada Gambar 7.

Jari-jari *R* dapat dibuat cukup besar sehingga semua titik pole berada di dalam *C*, jadi menurut teorema residu berlaku

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\,s[f, z_k] \tag{9}$$

untuk setiap $z_1, z_2, ..., z_k$ di dalam *C*.

Misalkan $z = R\,e^{it}$ maka setengah lingkaran C_1 dinyatakan oleh $|z| = R$; $0 \le t \le \pi$

Karena derajat penyebut sekurang-kurangnya 2 lebih besar dari pembilang maka

$\left|f(z)\right| < \dfrac{K}{|z|^2}$, $(|z| = R > R_0)$. untuk *K* cukup besar dari R_0,

sehingga

$$\left|\int_{C_1} f(z)dz\right| < \frac{K}{R^2}\pi R = \frac{K\pi}{R}$$

Apabila *R* menuju tak hingga maka $\dfrac{K\pi}{R}$ menuju 0 sehingga $\left|\int_{C_1} f(z)dz\right| = 0$.

Jadi dari persamaan (8) dan (9) diperoleh :

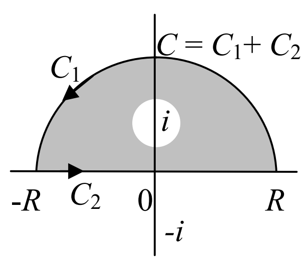
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\,s[f, z_k] \tag{10}$$

Selanjutnya pembahasan mengenai cara menghitung nilai integral dari permasalahan utama dalam tulisan ini yaitu mengitung $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ sebagai berikut. Permasalahan ini merupakan integral fungsi rasional real yang akan dihitung dengan residu rumus (10), adapun perhitungannya sebagai berikut.

$$\int_C f(z)dz = \int_C \frac{dz}{(1+z^2)^2} = \int_C \frac{dz}{\{(-i+z)(i+z)\}^2} = \int_C \frac{dz}{(-i+z)^2(i+z)^2}$$

Fungsi $f(z)$ mempunyai titik pole di $z = i$ derajat 2 dan di $z = -i$ derajat 2, sehingga

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,s[f,i] &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[(-i+z)^2\frac{1}{(-i+z)^2(i+z)^2}\right] \\
&= \frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(i+z)^2}\right] \\
&= 1\cdot\lim_{z\to i}\left[\frac{0-(1)(2)(i+z)}{(i+z)^4}\right] \\
&= \lim_{z\to i}\left[\frac{-2}{(i+z)^3}\right] = \left(\frac{-2}{-8i}\right) = \frac{1}{4i}
\end{aligned}$$



Gambar 8

Titik pole $z = -i$ di luar *C* seperti yang terlihat pada Gambar 8 sehingga tidak perlu dihitung residunya. Jadi, $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2} = 2\pi i\,\mathrm{Re}\,s[f,i] = 2\pi i\left(\frac{1}{4i}\right) = \frac{\pi}{2}$.

hasilnya $\frac{\pi}{2}$ merupakan bilangan real. Dengan demikian integral tak wajar fungsi real menghasilkan nilai real juga walaupun perhitungannya dengan menggunakan perantaraan sistem bilangan dan fungsi kompleks.

PENUTUP

Integral tak wajar fungsi rasional real yang memiliki derajat penyebut minimal 2 lebih besar dari derajat pembilang, misalnya $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$, dapat dihitung nilainya dengan cara menghitung nilai residu fungsi kompleks yang berkaitan. Dengan demikian kita telah dapat menghitung nilai itegral fungsi real dengan cara lebih mudah yaitu dengan menggunakan teknik residu pada fungsi kompleks.

REFERENSI

Ansjar, M. (1969). *Fungsi kompleks*. Bandung: ITB.

Kreyzig, E. (1979). *Advanced engineering Mathematics*. New York: John Wiley & Son.

Osborn, A.D. (1999). *Complex variables and their applications*. Harlow, England: Addison Wesley Longman.

Paliouras, J.D. (1975). *Complex variables for scientists and engineers*. New York: Macmillan Publishing Company, Inc.

Sardi, H. (2006). *Fungsi kompleks*. Jakarta: Universitas Terbuka.