# BENTUK NORMAL SMITH DAN MATRIKS BAIK KIRI/KANAN

Yumiati (yumi@mail.ut.ac.id)
Universitas Terbuka

## ABSTRACT

*The Smith normal form and left good matrix have been known in matrix theorem. Any matrix over the principal ideal ring has a Smith normal form. The Smith normal form of a matrix has many applications on various fields such as a solution of Diophantin linear equation and differential equation system. Furthermore, a matrix A with entries in a commutative ring R with unity is left good if for every vector x, the ideal $\langle xA \rangle$ is the same as the ideal $\langle A \rangle$. This paper discusses the relation between the Smith normal form and left good matrix. The relation is as the following: matrix A with entries in principal ideal ring of size m by n, with $m < n$, has Smith normal form $[I_m, O]$ if only if A is a left good matrix.*

*Key words: left good matrix, principal ideal ring, Smith normal form.*

Teori matriks telah dikembangkan secara luas termasuk aplikasi-aplikasinya, baik dalam perkembangan matematika sendiri maupun dalam aplikasinya untuk perkembangan ilmu-ilmu lainnya. Dalam teori matriks ini telah dikenal suatu matriks yang disebut bentuk normal Smith.

Setiap matriks atas ring ideal utama pasti mempunyai bentuk normal Smith. Keberadaan bentuk normal Smith banyak digali oleh para matematikawan melalui berbagai pendekatan, di antaranya Mac Duffe (1972) yang menggalinya lewat matriks polinomial atas field; Adkins (1992) menggalinya lewat pendekatan teori modul; serta Newman (1972) dan Brown (1993) mencoba menggalinya lewat ring komutatif yang diawali dengan memperkenalkan bentuk normal Hermite.

Pembahasan bentuk normal Smith ini sangat diminati karena bentuk normal Smith mempunyai penggunaan yang sangat luas (Newman,1997). Penggunaan bentuk normal Smith tersebut adalah dalam menyelesaikan sistem persamaan linear Diophantin Ax = B; menentukan penyelesaian umum sistem persamaan diferensial dengan koefisien tetap, aplikasi pada teori grup abelian yang didefinisikan dengan pembangun dan relasi, aplikasi dalam ideal yang dibangun oleh komponen suatu vektor, aplikasi dalam perluasan suatu matriks, serta aplikasi lainnya.

Dalam teori matriks dikenal juga istilah matriks baik kiri dan matriks baik kanan. Matriks baik kiri dan matriks baik kanan adalah matriks yang mempertahankan ideal (Richter ,1997). Melihat definisi yang dikemukakan Richter tentang matriks baik kiri dan kanan (yang mempertahankan ideal) dan keberadaan bentuk normal Smith (ada pada setiap matiks atas ring ideal utama), maka timbul suatu pertanyaan adakah hubungan antara keduanya?

Tulisan ini membahas hubungan antara matriks baik kiri/kanan dengan bentuk normal Smith. Namun pembahasan dibatasi hanya pada matriks baik kiri. Untuk matriks baik kanan, karena definisinya serupa, maka baik teorema maupun pembuktiannya dapat dilakukan dengan cara yang sama.

## KONSEP DASAR

Definisi bentuk normal Smith dikemukakan oleh Brown (1993) sebagai berikut.

### Definisi 1

Diberikan ring komutatif R dengan elemen satuan dan $A \in M_{m \times n}(R)$ dengan rank (A) = $r < \min\{m, n\}$. Matriks $S = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{m \times n}(R)$ dengan $D = \mathrm{diag}(s_1, s_2, \ldots, s_r)$ disebut bentuk normal Smith A jika $A \approx S$ dan $s_i \mid s_{i+1}$ untuk i = 1, 2, …, r – 1.

$M_{m \times n}(R)$ adalah himpunan matriks berukuran $m \times n$ atas R. Matriks $D = \mathrm{diag}(s_1, s_2, \ldots, s_r)$ dimaksudkan dengan matriks diagonal dengan komponen diagonal utamanya adalah $s_1, s_2, \ldots, s_r$, atau dalam penulisannya: $D = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & s_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & s_r \end{bmatrix}$. Sedangkan $A \approx S$ berarti matriks A ekuivalen dengan matriks S, yaitu terdapat matriks U anggota himpunan matiks unit berukuran $m \times m$ (*ditulis* $U \in GL(m, R)$) dan V anggota himpunan matriks unit berukuran $n \times n$ (*ditulis* $V \in GL(n, R)$) sehingga UAV = S.

Tidak semua matriks atas ring komutatif dengan elemen satuan mempunyai bentuk normal Smith. Berikut merupakan teorema yang diberikan oleh Newman (1997), memberikan syarat agar suatu matriks mempunyai bentuk normal Smith.

### Teorema 1

Jika R adalah ring ideal utama, maka untuk setiap $A \in M_{m \times n}(R)$ mempunyai bentuk normal Smith. Selanjutnya bentuk normal Smith tersebut tunggal dalam relasi sekutu.

Sementara definisi matriks baik kiri/ kanan didefinisikan oleh Richter (1997) sebagai berikut.

### Definisi 2

Diberikan ring komutatif R dengan elemen satuan dan $A \in M_{m \times n}(R)$ dengan $m < n$ . Matriks A disebut matriks baik kiri jika untuk setiap vektor baris $x = [x_1, x_2, \ldots, x_m]$ atas R berakibat $\langle x \rangle = \langle xA \rangle$ dimana $\langle x \rangle$ adalah ideal yang dibangun oleh komponen dari vektor x dan $\langle xA \rangle$ adalah ideal yang dibangun oleh komponen dari vektor xA.

Secara sama didefinisikan matriks baik kanan, yaitu matriks $B \in M_{m \times n}(R)$ disebut matriks baik kanan jika untuk setiap vektor kolom $y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]^t$ atas R berakibat $\langle y \rangle = \langle yA \rangle$.

Secara umum tidak akan terjadi $\langle xA \rangle = \langle Ax \rangle$. Namun dapat terjadi $\langle xA \rangle = \langle Ax^t \rangle$ jika A adalah matriks simetris . Selanjutnya pembicaraan dalam tulisan ini dibatasi hanya pada matriks baik kiri.

## PEMBAHASAN

Contoh-contoh berikut ini memberi gambaran yang lebih jelas tentang matriks baik kiri, sebelum pembahasan kepada teorema yang menunjukkan hubungan antara bentuk normal Smith dan matriks baik kiri.

**Contoh 1**

Diberikan R = himpunan semua bilangan real.

A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(R)$

x = $[x_1\ x_2]$ adalah vektor baris atas ring R.

xA = $[x_1\ x_2] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [x_1 \quad x_1+x_2]$

$\langle x \rangle = \{ r_1x_1 + r_2x_2 \mid r_1, r_2 \in R \}$

$= \{ r_1x_1 - r_2x_1 + r_2x_1 + r_2x_2 \mid r_1, r_2 \in R \}$

$= \{ (r_1 - r_2)x_1 + r_2(x_1 + x_2) \mid r_1, r_2 \in R \}$

$= \langle xA \rangle$

Jadi A adalah matriks baik kiri.

**Contoh 2**

Diberikan Z = himpunan semua bilangan bulat.

B = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(Z)$

x = [1  1] adalah vektor baris atas ring Z.

xB = $[1\ \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 2]$

$\langle x \rangle = \{ r_1.1 + r_2.1 \mid r_1, r_2 \in Z \}$

$= \{ r_1 + r_2 \mid r_1, r_2 \in Z \}$

= himpunan bilangan bulat

= Z

$\langle xB \rangle = \{ r_1.0 + r_2.2 \mid r_1, r_2 \in Z \}$

$= \{ 2r_2 \mid r_2 \in Z \}$

= himpunan bilangan genap

$\langle x \rangle \neq \langle xB \rangle$

Jadi B bukan matriks baik kiri.

Sampailah pada teorema yang menyatakan hubungan antara bentuk normal Smith dengan matriks baik kiri sebagai berikut.

**Teorema 2**

Diberikan ring komutatif R dengan elemen satuan dan A $\in M_{m\times n}(R)$ dengan m < n . Jika A mempunyai bentuk normal Smith $[I_m, 0]$, maka A adalah matriks baik kiri.

**Bukti**

Diketahui bahwa A mempunyai bentuk normal Smith S = $[I_m, 0]$, maka terdapat U $\in$ GL (m, R) dan V $\in$ GL (n, R) sehingga UAV = S atau A = $U^{-1}SV^{-1}$.

Akan dibuktikan :

(1) S adalah matriks baik kiri
(2) $U^{-1}$ dan $V^{-1}$ adalah matriks baik kiri
(3) A adalah matriks baik kiri

*Ad (1)*

Ambil sebarang $x = [x_1, x_2, \ldots, x_m]$ dengan $x_i \in R$, untuk setiap i = 1, 2, …, m.
$xS = [x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots, 0]$
$\langle xS\rangle = \{ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m \mid a_i \in R$, untuk setiap i = 1, 2, …,m }
$= \langle x\rangle$
Jadi S adalah matriks baik kiri

*Ad (2)*

$I_m$ adalah matriks baik kiri, karena untuk setiap $x = [x_1, x_2, \ldots, x_m]$ dengan $x_i \in R$, untuk setiap i = 1, 2, …, m berlaku $\langle x\rangle = \langle xI_m\rangle$.
$U^{-1}U = I_m$, maka $U^{-1}U$ adalah matriks baik kiri, yaitu $\langle x\rangle = \langle xI_m\rangle = \langle xU^{-1}U\rangle$ untuk setiap $x = [x_1, x_2, \ldots, x_m]$ dengan $x_i \in R$ dan i = 1, 2, …, m.
Akibatnya $\langle x\rangle = \langle xU^{-1}U\rangle \subseteq \langle xU^{-1}\rangle$, atau $\langle x\rangle \subseteq \langle xU^{-1}\rangle$ …………………...(i)
Sementara itu: $\langle xU^{-1}\rangle \subseteq \langle x\rangle$ …………………...(ii)
Dari (i) dan (ii) dapat disimpulkan bahwa $\langle x\rangle = \langle xU^{-1}\rangle$. Jadi $U^{-1}$ adalah matriks baik kiri. Dengan cara yang sama akan diperoleh juga bahwa $V^{-1}$ adalah matriks baik kiri .

*Ad (3)*

Ambil sebarang $x = [x_1, x_2, \ldots, x_m]$ dengan $x_i \in R$, untuk setiap i = 1, 2, …, m.
$\langle x\rangle = \langle xU^{-1}\rangle$ karena $U^{-1}$ adalah matriks baik kiri
$= \langle xU^{-1}S\rangle$ karena S adalah matriks baik kiri
$= \langle xU^{-1}SV^{-1}\rangle$ karena $V^{-1}$ adalah matriks baik kiri
$= \langle xA\rangle$
Jadi A adalah matriks baik kiri.

Teorema di atas bekerja atas ring komutatif R dengan elemen satuan. Sekarang timbul pertanyaan, apakah konversnya tetap benar? Tentu saja, pembuktiannya hanya tergantung pada keberadaan bentuk normal Smith dari A, sedangkan keberadaan bentuk normal Smith A ditentukan oleh ring ideal utama, maka timbulah teorema berikut.

***Teorema 3***

Diberikan ring ideal utama R dan $A \in M_{m\times n}(R)$ dengan $m < n$. Matriks A mempunyai bentuk normal Smith $[I_m, 0]$, jika dan hanya jika A adalah matriks baik kiri.

***Bukti***

($\Rightarrow$) Sudah dibuktikan pada *Teorema 2*
($\Leftarrow$) Misalkan $D_m$ adalah ideal yang dibangun oleh sub determinan berukuran $m \times m$ dari matriks A. Akan dibuktikan $D_m = R$.
Andaikan $D_m$ ideal sejati R.

Misal $\overline{R}$ adalah ring quotient R/$D_m$ dan $\overline{A} \in M_{m\times n}(\overline{R})$. Ambil sebarang sub determinan berukuran m x m dari $\overline{A}$, katakan $\overline{A_m}$, maka $\overline{A_m}$ = $A_m + D_m$ dengan $A_m$ adalah sub determinan berukuran m × m dari A. Jadi $A_m \in D_m$, dengan kata lain $\overline{A_m} \in D_m$. Jadi $\overline{A_m}$ = $\overline{o} \in \overline{R}$. Karena sebarang sub determinan berukuran m x m dari $\overline{A}$ adalah $\overline{o} \in \overline{R}$, maka rank ($\overline{A}$) < m. Oleh karena itu terdapat vektor $\overline{x} = \left[\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_m}\right] \neq \left[\overline{o}\right]$ dengan $\overline{x_i} \in \overline{R}$ untuk setiap i = 1, 2, ..., m sehingga $\overline{x}.\overline{A}$ = $\left[\overline{o}\right]$. Misal x = [$x_1$, $x_2$, …, $x_m$] dengan $x_i \in R$ untuk setiap i = 1, 2, …,m. Menurut yang diketahui A adalah matriks baik kiri, maka $\langle x\rangle = \langle xA\rangle \subseteq D_m$. Akibatnya $x_i \in D_m$ dan $\overline{x_i}$ = $\left[\overline{o}\right]$ untuk setiap i = 1, 2, ...,m. Kontradiksi dengan $\overline{x} \neq \left[\overline{o}\right]$. Jadi pengandaian salah, yang benar $D_m$ = R. Berdasarkan hipotesis, A mempunyai bentuk normal Smith, katakan S = $\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{m\times n}(R)$ dengan D = diag ($s_1$, $s_2$, …, $s_m$), maka $D_m$ = $\langle s_1.s_2…s_m\rangle$ = R. 1 ∈ R, maka 1 = r.$s_1.s_2…s_m$ untuk suatu r ∈ R. Hal ini berakibat untuk setiap i = 1, 2, ..., m, $s_i$ adalah unit di dalam R .

Dengan menggunakan operasi elementer baris dan kolom matriks S = $\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dapat dibawa ke bentuk [$I_m$, 0], yaitu $\begin{bmatrix} s_1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & s_m & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Jadi bentuk normal Smith dari A adalah [$I_m$, 0].

Teorema di atas jika diberlakukan pada matriks baik kanan akan berbunyi: Diberikan ring komutatif R dan A ∈ $M_{m\times n}(R)$ dengan m > n. Matriks A mempunyai bentuk normal Smith $\begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}$ jika dan hanya jika A adalah matriks baik kanan.

**PENUTUP**

Setiap matriks berukuran m x n atas ring ideal utama dimana m < n mempunyai bentuk normal Smith [$I_m$, 0] jika dan hanya jika matriks tersebut adalah matriks baik kiri. Masalah yang belum diketahui jawabannya sampai saat ini adalah: apakah setiap matriks baik kiri berukuran m x n atas ring komutatif R ekuivalen dengan matriks [$I_m$, 0]? Masalah ini merupakan tantangan untuk melakukan penelitian selanjutnya untuk mengetahui jawabannya.

**REFERENSI**

Adkins, W.A. & Weintraub, S.H. (1992). *Algebra an approach via module theory*. Newyork: Spronger–Verlag.

Brown, W.C. (1993). *Matrices over commutative rings*. New york: Marcel Dekker, Inc.

Mac Duffe, C.C. (1972). *Vector and matrices*. USA: The Mathematical Association of America.
Newman, M. (1997). The Smith Normal Form. *Linear Algebra and Its Applications,* 254, 367-381.
Newman, M. (1972). *Integral matrices*. Newyork: Academic Press.
Richter, R.B. & Wardlaw, W.P. (1997). Good matrices: Matrices that preserve ideals. American Mathematical Monthly.