Solusi Persamaan Schrödinger Osilator Harmonik dalam Ruang Momentum

Paken Pandiangan[*)] dan A. Arkundato[**)]
[*)]*PMIPA FKIP Universitas Terbuka*
[**)]*FMIPA Universitas Jember*

Abstract

The solution of Schrödinger equation for the simple harmonic oscillator has been investigated and explored. The solutions are coordinate representation or momentum representation. The eigen energy is $E_n = \hbar\omega_0(n + \frac{1}{2})$. *The expectation value is* $\langle x \rangle_n = \langle p \rangle_n = 0$ *respectively. Both Method will produce similar result.*

Key words: Schrödinger equation, harmonic oscillator, momentum represent-tation.

PENDAHULUAN

Telaah baku mengenai suatu sistem fisis mikroskopis yang berdimensi atom pada umumnya dimulai dengan mendefinisikan persamaan Schrödinger yang sesuai untuk sistem tersebut. Selanjutnya dengan menyelesaikan persamaan ini untuk syarat batas yang diberikan, energi eigen dan fungsi gelombang yang menggambarkan keadaan sistem tersebut dapat diketahui. Dengan mengetahui struktur energi sistem, kita selanjutnya berusaha mencari terobosan-terobosan baru baik yang bersifat aplikatif maupun substansional untuk merumuskan teori baru yang lain. Pada umumnya persamaan yang sering dipecahkan misalnya berbentuk sebagai berikut.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} \tag{1}$$

Hal ini berlaku pada sistem partikel tunggal bermassa *m* dalam medan potensial *V*(x) yang dievaluasi untuk dimensi satu.

Persamaan Schrödinger yang merupakan salah satu persamaan fundamental dalam telaah mekanika kuantum sebenarnya mempunyai bentuk yang lebih umum sebagai berikut.

$$\hat{H}\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{2}$$

$\hat{H}$ adalah operator Hamiltonian atau sering disebut Hamiltonian sistem. Bentuk Hamiltonian ini ditentukan berdasarkan sifat-sifat sistem dimaksud, yang untuk kasus nonrelativistik gerak partikel bermassa *m* dalam medan potensial *V* tersebut akan bersifat real dan merupakan penjumlahan dari operator energi kinetik dan energi potensial partikel yaitu:

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} \tag{3}$$

Sampai di sini kita dihadapkan pada pilihan bebas untuk merumuskan Hamiltonian dari suku energi kinetik dan potensial sistem. Kita dapat menyatakan Hamiltonian sistem berbentuk:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\vec{p}) \tag{4}$$

dengan menyatakan momentum linear $\hat{p} = -i\hbar\nabla$, sehingga Hamiltoniannya dapat dituliskan sebagai

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \hat{V}(\vec{r}) \tag{5}$$

Kedua rumusan (4) dan (5) sesungguhnya mewakili sistem partikel yang sama, namun dirumuskan secara berbeda karena baik (4) maupun (5) menyatakan $\hat{H}$ dalam (3). Mana yang seharusnya kita gunakan dari kedua rumusan di atas? Jawabannya bergantung pada kedua rumusan tersebut manakah yang akan lebih menguntungkan kita untuk menyelesaikan persamaan Schrödinger yang telah didefinisikan untuk sistem. Pada masalah hamburan, sering lebih menguntungkan jika kita selesaikan dengan (4). Perhitungan numerik sistem kuantum nano-struktur juga akan memberikan perbaikan yang signifikan pada lama waktu eksekusi program (*code*) serta memori komputer yang diperlukan[1]. Untuk mencari informasi berkaitan dengan sistem kuantum, kita dapat menggunakan (4) atau menggunakan (5) dan kedua-duanya seharusnya menghasilkan kesimpulan yang sama untuk sistem. Selanjutnya kita dapat menyatakan bahwa solusi persamaan Schrödinger dengan menggunakan Hamiltonian (4) adalah *solusi ruang momentum* sedangkan solusi persamaan Schrödinger dengan menggunakan Hamiltonian (5) disebut *solusi ruang koordinat*[2]. Fungsi gelombang dalam ruang koordinat dituliskan dengan $\psi(\vec{r},t)$ dan fungsi gelombang dalam ruang momentum dinyatakan dengan $\psi(\vec{p},t)$

Riset teoretik yang disampaikan dalam tulisan ini adalah mencoba mencari solusi persamaan Schrödinger untuk sistem osilator harmonik dalam *ruang momentum.* Sistem osilator yang akan ditelaah adalah osilator harmonik sederhana dan untuk satu dimensi. Solusi ruang koordinat untuk osilator ini sudah sering diungkap dalam buku-buku baku mekanika kuantum sehingga kita dapat menggunakannya sebagai *gauge* untuk model solusi ruang momentum kita.

TINJAUAN PUSTAKA

Osilator harmonik terjadi di banyak cabang fisika dan merupakan salah satu sistem penting untuk dipelajari secara rinci. Di dalam fisika atom, vibrasi atom di dalam molekul dan zat padat dihampiri dengan pengandaian gerak osilasi harmonik. Di dalam fisika inti potensial rata-rata nukleon di dalam inti juga sering dihampiri dengan potensial harmonik. Di dalam fisika partikel fungsi gelombang mode fourier tunggal boson juga dianggap sebagai gerak harmonik [4]. Selanjutnya osilator harmonik sederhana adalah sebuah model yang banyak digunakan guna mendekati potensial kompleks di dalam banyak disiplin ilmu. Mengapa demikian? Meskipun sebagaian besar masalah osilasi di alam yang kita jumpai adalah gerak osilasi teredam (*damped*) atau terpaksa (*forced*) namun simpangan kecilnya terhadap titik kesetimbangan dapat sangat akurat dihampiri dengan osilator harmonik sederhana [5].

Gerak Harmonik Sederhana Klasik

Secara klasik rumusan gerak harmonik sederhana diberikan oleh persamaan diferensial orde dua berikut ini.

$$\frac{d^2}{dx^2}x(t) = -\omega_0^2 x(t) \qquad (6)$$

dengan "salah satu" solusinya yang memenuhi adalah berbentuk

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi) \qquad (7)$$

di mana ω_0 adalah frekuensi alamiah, serta ϕ adalah tetapan fase. Sistem osilator harmonik sederhana yang paling terkenal misalnya adalah sistem pegas dengan tetapan pegas k_f dengan sebuah massa m diikatkan pada ujung pegas, dan ujung pegas yang lain terikat pada suatu dinding tak bergerak. Sistem ini mempunyai frekuensi alamiah sebagai solusi dari persamaan (6) berbentuk:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_f}{m}} \qquad (8)$$

Secara praktis amplitudo dan tetapan fase ditentukan oleh syarat awal $x(t_0)$. Energi potensial yang diturunkan dari hukum Hooke untuk pegas tersebut adalah:

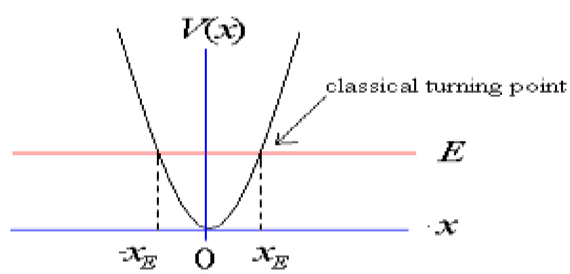
$$V(x) = -\int F dx = \tfrac{1}{2}k_f x^2 = \tfrac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \qquad (9)$$

Energi total dari partikel adalah energi kinetiknya ditambah energi potensial partikel yaitu:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \tfrac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \qquad (10)$$

Sistem pegas ini mempunyai *classical turning point* di titik (Gambar 1):

$$x_E = \pm\sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}} \qquad (11)$$



Gambar 1. Energi potensial menurut hukum Hooke

Dengan rumusan (6) sampai dengan (11), maka kita dapat memprediksi hsil pengukuran yang dilakukan pada osilator klasik. Kita selanjutnya akan merumuskan solusi kuantum gerak osilator mikroskopis.

Solusi Kuantum Dalam Ruang Koordinat Gerak Osilator Sederhana

Hamiltonian pada persamaan (5) mengenai osilator harmonik sederhana dalam ruang koordinat menurut padanan klasik persamaan (10) adalah:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \tfrac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 \qquad (12)$$

Solusi persamaan Schrödinger tak gayut waktu untuk Hamiltonian ini adalah:

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi_n(x) = -\frac{2m}{\hbar^2}\left[E_n - \tfrac{1}{2} m\omega_0^2 x^2\right]\psi_n(x) \qquad (13)$$

Sehingga solusi persamaan (2) untuk keadaan stasioner sistem adalah:

$$\Psi_n(x,t) = \psi_n(x)\exp[-iE_n t/\hbar] \qquad 14)$$

dengan E_n adalah salah satu energi yang diperbolehkan untuk osilator. Persoalan kita adalah untuk mencari $\psi_n(x)$ sebagai solusi dari persamaan (13).

Untuk menyelesaikan persamaan differensial secara analitik (utamanya secara numerik) sering akan *useful* jika kita dapat meminimasi jumlah simbol dan memunculkan variabel/parameter tak berdimensi. Untuk tujuan ini kita dapat melakukan langkah-langkah berikut.

- Persamaan (13) kita ubah menjadi:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{m^2\omega_0^2 x^2}{\hbar^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E_n\right]\psi_n(x) = 0 \qquad (15)$$

- Selanjutnya kita munculkan definisi-definisi berikut ini.

Energi	$\varepsilon \equiv (2/\hbar\omega_0)E$	Tak berdimensi
Kuat potensial	$\beta \equiv \sqrt{m\omega_0/\hbar}$	$(\text{panjang})^{-1}$
Posisi	$\xi \equiv \beta x$	Tak berdimensi

- Dengan definisi di atas kita men-skala x dengan *parameter kuat potensial* $\beta \equiv \sqrt{m\omega_0/\hbar}$ untuk menghasilkan variabel tak berdimensi $\xi \equiv \beta x$. Selanjutnya untuk menghindari persamaan (15) yang relatif rumit dalam x untuk fungsi $\psi_{E_n}(x)$, kita dapat mengubahnya menjadi solusi dalam ξ untuk $\psi_{E_n}(\xi)$. Dengan dalil rantai kita dapat merumuskan bahwa:

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\xi}{dx}\frac{d\psi}{d\xi} = \beta\frac{d\psi}{d\xi} \qquad (16)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{d}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}\left(\frac{d\psi}{dx}\right) = \beta^2\frac{d^2\psi}{d\xi^2} \qquad (17)$$

- Memperkenalkan variabel energi baru $\varepsilon \equiv (2/\hbar\omega_0)E$ maka kita dapat mengubah persamaan (15) menjadi persamaan Schrödinger untuk osilator harmonik sederhana dalam bentuk yang lebih elegan,

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2 + \varepsilon\right)\psi_\varepsilon(\xi) = 0 \qquad (18)$$

- Selanjutnya persamaan (18) merupakan persamaan Weber yang terkenal dalam matematika. Persamaan Weber merupakan salah satu persamaan diferensial yang solusi analitiknya sudah diketahui. Fungsi-fungsi yang muncul dalam solusi persamaan Weber merupakan fungsi-fungsi khusus (sebagai fungsi penting dalam matematika) dan sudah ditabelkan.

Solusi Persamaan Weber

Langkah pertama yang harus kita lakukan jika menemukan suatu persamaan diferensial yang belum dikenal adalah dengan cara melihat perilakunya untuk batas asimtotik variabel-variabelnya. Beberapa persamaan memperlihatkan keadaan *blow up* dalam batas-batas ini, sehingga kita harus menangani perilaku asimtotik untuk fungsi-fungsi yang tak diketahui ini lebih dahulu sebelum kita dapat memecahkan persamaan diferensial dengan metode standar, misalkan dengan metode deret. Kita biasanya menyebut titik-titik limit di atas sebagai titik-titik *singularitas.* Namun demikian juga dapat terjadi keadaan *blow up* pada titik berhingga, misalnya pada x = 0. Oleh karena itu sebelum mencoba menyelesaikan sebuah persamaan diferensial ada baiknya kita cari terlebih dahulu titik-titik singularitasnya.

Misalkan $\chi_{as}(\xi)$ adalah limit untuk $\psi_\varepsilon(\xi)$, yaitu $\psi_\varepsilon(\xi) \underset{\xi\to\pm\infty}{\longrightarrow} \chi_{as}(\xi)$. Persamaan Weber dapat kita tuliskan dalam bentuk asimtotik $\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2\right)\chi_{as}(\xi) = 0$. Persamaan ini sangat mirip dengan persamaan dari fungsi Gaussian: $\frac{d^2 f}{d\xi^2} = \left(\xi^2 \pm 1\right) f(\xi)$, yang mempunyai dua solusi bebas linear berbentuk Gaussian $\exp(-\xi^2/2)$ dan $\exp(\xi^2/2)$. Dalam daerah asimtotik fungsi Gaussian menjadi persamaan Weber. Solusi persamaan Weber untuk daerah asimtotik $\xi \to \pm\infty$ dapat kita nyatakan dengan

$$\chi_{as}(\xi) = A\exp(-\xi^2/2) + B\exp(\xi^2/2) \qquad (19a)$$

Solusi ini masih umum sifatnya, dan jika kita ingin mendapatkan fungsi gelombang yang *well-behaved*, maka kita perlu membuang suku kedua eksponensial sehingga fungsi eigen Hamiltonian osilator harmonik sederhana untuk batas asimtotik adalah:

$$\psi_{E_n}(\xi) \underset{\xi \to \pm\infty}{\longrightarrow} \chi_{as}(\xi) = A\exp(-\xi^2/2) \tag{19b}$$

Kita dapat merumuskan solusi eksak dengan menampilkan fungsi baru $H_\varepsilon(\xi)$ sebagai berikut.

$$\psi_{E_n}(\xi) = AH_\varepsilon(\xi)\exp(-\xi^2/2) \tag{20}$$

Agar fungsi gelombang ini ternormalisasi kita memerlukan persamaan berikut ini

$$H_\varepsilon(\xi)\exp(-\xi^2/2) \underset{\xi \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{21a}$$

Selanjutnya dengan substitusi persamaan (20) ke persamaan Weber (18) kita peroleh *persamaan diferensial Hermite.*

$$\frac{d^2}{d\xi^2}H_\varepsilon(\xi) - 2\xi H_\varepsilon(\xi) + (\varepsilon - 1)H_\varepsilon(\xi) = 0 \tag{21b}$$

Persoalan osilator harmonik sederhana yang kita hadapi sekarang adalah mencari solusi persamaan diferensial Hermite untuk batas asimtotik dengan memperhatikan syarat ternormalisasinya fungsi gelombang (fungsi gelombang yang dapat diterima). Untuk ini kita memerlukan polinomial Hermite (deret berhingga) sebagai ganti dari fungsi Hermite (deret takhingga).

Solusi persamaan Schrödinger tak gayut waktu untuk osilator harmonik sederhana dapat kita langsung berikan di sini (penurunan lebih lanjut dapat dilihat pada buku-buku mekanika kuantum):

$$\psi_n(x) = A_n H_n(\beta x)e^{-\beta^2 x^2/2} \tag{22}$$

dengan

$$\beta = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} \qquad (n = 0,1,2,3,\ldots) \tag{23}$$

Dengan energi eigen osilator harmonik sederhana adalah:

$$E_n = (n + \tfrac{1}{2})\hbar\omega_0 \qquad (n = 0,1,2,3,\ldots) \tag{24}$$

Beberapa nilai dari polinomial Hermite adalah:

$$H_0(\xi) = 1 \tag{25}$$

$$H_1(\xi) = 2\xi \tag{26}$$

$$H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2 \text{, …dan seterusnya} \tag{27}$$

Tetapan normalisasi fungsi gelombang dapat dicari dengan syarat normalisasi yaitu:

$$A_n = \left(\frac{\beta^2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \tag{28}$$

Fungsi gelombang osilator harmonik sederhana gayut waktu adalah

$$\Psi_n(x,t) = \left[\left(\frac{\beta^2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\right] H_n(\beta x) e^{-\beta^2 x^2/2} e^{-i(2n+1)\omega_0 t/2} \tag{29}$$

Kita dapat mentabelkan beberapa nilai fungsi eigen osilator harmonik sederhana dengan energi eigen terkait dalam tabel berikut ini.

n	E_n	$\psi_{E_n}(x)$
0	$\frac{1}{2}\hbar\omega_0$	$\left(\frac{\beta^2}{\pi}\right)^{1/4} \exp(-\beta^2 x^2)$
1	$\frac{3}{2}\hbar\omega_0$	$\left(\frac{\beta^2}{\pi}\right)^{1/4} \sqrt{1/2}\, 2\beta x \exp(-\beta^2 x^2)$
2	$\frac{5}{2}\hbar\omega_0$	$\left(\frac{\beta^2}{\pi}\right)^{1/4} \sqrt{1/8}(4\beta^2 x^2 - 2) \exp(-\beta^2 x^2)$
…	…	…

Dengan formulasi di atas, maka kita selanjutnya dapat menentukan beberapa sifat statistik dari sistem osilator harmonik sederhana dengan menggunakan konsep nilai ekspektasi. Sebagai contoh kita dapat menghitung nilai ekspektasi pengukuran posisi $\langle x \rangle$ dan momentum $\langle \hat{p} \rangle$ keadaan stasioner osilator harmonik sederhana secara berturut-turut adalah:

$$\langle x \rangle_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(x)\, x\, \psi_n(x)\, dx = 0 \text{, dan} \tag{30}$$

$$\langle p \rangle_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(x) \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right) \psi_n(x)\, dx = 0 \tag{31}$$

SOLUSI RUANG MOMENTUM OSILATOR HARMONIK

Selanjutnya di sini akan diturunkan bahwa fungsi gelombang osilator harmonik sederhana juga adalah *polynomial Hermite* kali sebuah fungsi Gaussian. Kita dapat merumuskan persamaan Schrödinger osilator harmonik sederhana dalam ruang momentum dengan mengingat kembali Hamiltonian sistem pada persamaan (10). Kita lakukan transformasi $x \rightarrow i\hbar \frac{d}{dp}$, sehingga kita peroleh Hamiltonian sistem sebagai berikut.

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} - \frac{m\omega_0^2\hbar^2}{2}\frac{d^2}{dp^2} \tag{32}$$

Dengan demikian persamaan Schrödinger osilator harmonik sederhana dapat dituliskan sebagai,

$$\left(\frac{p^2}{2m} - \frac{m\omega_0^2\hbar^2}{2}\frac{d^2}{dp^2}\right)\varphi_n(p) = E_n\varphi_n(p) \tag{33}$$

dengan ini kita telah membedakan bahwa fungsi eigen ruang momentum adalah $\varphi(p)$. Selanjutnya kita pecahkan persamaan ini dengan cara yang kurang lebih sama dengan cara kita memecahkan persoalan OHS dalam ruang koordinat.

Solusi persamaan ini juga akan berbentuk *polynomial Hermite* kali fungsi Gaussian, yaitu:

$$\varphi_n(p) = F_n(p)\exp(-\gamma p^2) \tag{34}$$

Turunan kedua dari fungsi ini adalah:

$$\varphi''_n(p) = \left\{F''_n(p) - 4\gamma pF'_n + (4\gamma^2 p^2 - 2\gamma)F_n\right\}\exp(-\gamma p^2 \tag{35}$$

Substitusi (35) dan (34) ke (33) diperoleh:

$$-\frac{m\omega_0^2\hbar^2}{2}F''_n + 2m\omega_0^2\hbar^2\gamma pF'_n + \left(\gamma m\omega_0^2\hbar^2 + \frac{p^2}{2m} - 2\gamma^2 m\omega_0^2\hbar^2 p^2\right)F_n = E_nF_n \tag{36}$$

Misalkan nilai γ adalah sebagai berikut.

$$\gamma = 1/(2m\hbar\omega_0) \tag{37}$$

maka kita akan mendapatkan persamaan diferensial untuk fungsi F_n yaitu,

$$-\frac{m\omega_0^2\hbar^2}{2}F''_n + \hbar\omega_0 pF'_n + \left(\frac{\hbar\omega_0}{2} - E_n\right)F_n = 0 \tag{38}$$

Seperti biasanya kita definisikan parameter tak berdimensi $q = \frac{p}{\sqrt{m\omega_0\hbar}}$, sehingga persamaan (38) menjadi:

$$\frac{d^2F_n}{dq^2} - 2q\frac{dF_n}{dq} + \left(\frac{2E_n}{\hbar\omega_0} - 1\right)F_n = 0 \qquad (39)$$

Persamaan diferensial ini akan memberikan *polynomial Hermite* seperti pada rumusan kita sebelumnya jika kita ambil $E_n = \hbar\omega_0(n + \tfrac{1}{2})$. Pilihan E_n yang lain akan menunjukkan bahwa F pada q besar (daerah asimptotik) akan *divergen* sehingga fungsi gelombang total akan bersifat *divergen*, yang secara fisis ini akan ditolak.

Dengan logika yang sama seperti yang kita gunakan untuk memecahkan persamaan dalam ruang koordinat, maka fungsi gelombang dalam ruang momentum adalah:

$$\varphi_n(p) = e^{i\theta_n} N_n H_n\left(\frac{p}{\sqrt{m\omega_0\hbar}}\right)\exp\left[-p^2/(2m\omega_0\hbar)\right] \qquad (40)$$

dengan tetapan normalisasi sebesar

$$N_n = \left(\frac{1}{m\omega_0\pi\hbar}\right)^{1/4} / \sqrt{2^2 n!} \qquad (41)$$

Fungsi eigen dalam ruang momentum juga kita sisipkan faktor fase *exp(iθ_n)* agar *Fourier Transform* fungsi eigen ruang momentum tepat sama memberikan fungsi eigen ruang koordinat seperti pada persamaan (29).

PEMBAHASAN

Solusi persamaan Schrödinger untuk osilator harmonik sederhana dalam ruang momentum menghasilkan fungsi eigen persamaan (40) dengan energi eigen $E_n = \hbar\omega_0(n + \tfrac{1}{2})$ yang tidak lain adalah nilai yang diperoleh menurut solusi ruang koordinat, yaitu persamaan (24). Kita dapat mencari validitas fungsi gelombang yang kita dapatkan dengan mencari sifat-sifat statistik besaran fisis namun menurut fungsi eigen ruang momentum kemudian membandingkan hasilnya dengan hasil solusi ruang koordinat. Jika kita selesaikan persamaan nilai ekspektasi posisi dan momentum berikut,

$$\langle x\rangle_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^*(p)\left(i\hbar\frac{d}{dp}\right)\psi_n(p)dp \qquad (42)$$

dan

$$\langle p \rangle_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(p)(p)\psi_n(p)dp \tag{43}$$

maka hasilnya akan sama yaitu

$$\langle x \rangle_n = \langle p \rangle_n = 0 \qquad \text{di ruang momentum.} \tag{44}$$

Perhitungan nilai ekspektasi observabel yang lain akan memperlihatkan hasil yang sama di kedua ruang. Oleh karena itu dalam menyelesaikan persoalan kuantum kita dapat memilih pemecahan persamaan Schrödinger, baik di ruang momentum ataupun di ruang posisi, bergantung pada tujuan kita. Melalui studi nanostruktur ini, perhitungan numerik persamaan Schrödinger akan menghemat waktu eksekusi program jika kita gunakan pendekatan ruang momentum [1].

KESIMPULAN DAN SARAN

Studi kuantum osilator harmonik sederhana dengan pendekatan solusi ruang momentum menunjukkan bahwa hasil yang diperoleh sama dengan solusi ruang koordinat. Oleh karena itu sistem kuantum secara umum dapat ditelaah melalui salah satu atau kedua-duanya pendekatan tersebut. Dalam salah satu aspek mungkin solusi ruang posisi lebih baik dari solusi ruang momentum demikian juga sebaliknya.

Persamaan Schrödinger untuk ruang posisi adalah

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{m\omega_0^2 x^2}{\hbar^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E_n\right]\psi_n(x) = 0$$

dengan fungsi eigen serta energi eigennya masing-masing adalah:

$$\Psi_n(x,t) = \left[\left(\frac{\beta^2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\right] H_n(\beta x)e^{-\beta^2 x^2/2} e^{-i(2n+1)\omega_0 t/2} \quad \text{dan} \quad E_n = \hbar\omega_0(n + 1/2).$$

Sedangkan persamaan Schrödinger di ruang momentum adalah

$$\left(\frac{p^2}{2m} - \frac{m\omega_0^2\hbar^2}{2}\frac{d^2}{dp^2}\right)\varphi_n(p) = E_n\varphi_n(p)$$

dengan fungsi eigen serta nilai eigennya masing-masing adalah

$$\varphi_n(p) = e^{i\theta_n} N_n H_n\left(\frac{p}{\sqrt{m\omega_0\hbar}}\right)\exp\left[-p^2/(2m\omega_0\hbar)\right] \quad \text{dan} \quad E_n = \hbar\omega_0(n + 1/2).$$

Perhitungan nilai ekspektasi posisi dan momentum kedua pendekatan ini sama yaitu

$$\langle x \rangle_n = \langle p \rangle_n = 0 .$$

Sebagai saran untuk riset teoretik ini ada baiknya dicoba perhitungan secara numerik kedua pendekatan untuk meminimalisasi beberapa asumsi yang harus diberikan, sehingga secara pasti kita memperoleh kesimpulan yang lebih baik.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Pala, M.G., Lannaccone, G., A three-dimensional solver of the Schrödinger Equation in momentum space for the detailed simulation of nanostructures, Nanotechnology 13 (2002) 369-372.

[2] Davidov, A.A., Quantum Mechanics, Pergamon Press, 1965

[3] Kroemer, H., Quantum Mechanics for Enginnering, Material Sciences and Applied Physics, Prentice Hall Inc., 1994

[4] Dawson, J.F., Quantum Mechanics, Fundamental Principles and Application, Dept of Physics, University of Hampshire, Durham, 2003.

[5] Morrison, M.A., Understanding Quantum Physics, Prentice-Hall International Editions, 2000.

[6] http://www.math.md/imi-site/journals/Buletin/issues/iss_abst/abs97_2.shtml.

[7] http://www.ams.org/mathscinet. American Mathematical Society 201 Charles StreetProvidence, RI 02904-2294.