SUATU STUDI TENTANG UJI HIDUP DIPERCEPAT TEGANGANBERTINGKAT: PERKEMBANGAN MUTAKHIR

Zanzawi Soejoeti

ABSTRACT

This paper is reviewing the development of life testing data analysis of lie testing conducted in normal stress condition; stronger than normal stress (or constant stress accelerated life testing); and step stress accelerated life testing. It used exponential life test distribution model, log-normal accelerated model and tempered failure rate step stress model. It is completed by describing several problem for the future research.

Keywords: log linear acceleration, exponential distribution, standard extreme value distribution, liklihood function.

PENDAHULUAN

Guna menentukan kinerja dan tahan hidup suatu produk (benda) atau membandingkan rancangan produksi yang berbeda, cara uji hidup yang paling terpercaya adalah menguji benda tersebut pada kondisi (tegangan, stress) operasinya normal. Sebanyak n benda diuji pada kondisi operasinya normal sampai semua "mati" (sampel lengkap), atau percobaan dihentikan sebelum semua benda "mati" (sampel disensor). Sensor dimasukkan untuk memperpendek waktu percobaan, terutama bagi benda-benda yang cukup andal. Beberapa macam sensor telah dipelajari orang, antara lain, sensor tipe I jika percobaan dihentikan setelah berjalan selama waktu t yang ditentukan. Sedangkan sensor tipe II jika percobaan dihentikan setelah "kematian" benda yang ke r (yang ditentukan). Tahan hidup benda yang "mati" diamati dan digunakan untuk menaksir, misalnya, tahan hidup rata-rata dan keandalan benda itu. Distribusi tahan hidup yang sering digunakan sebagai model, antara lain, adalah eksponensial (misalnya Epstein dan Sobel (1953), dan Zelen (1959)), Weibull (misalnya Mann (1971), dan Lawless (1973), log-normal (misalnya Cohen (1976)); dan Gamma (misalnya Gupta dan Groll (1961), dan Harter dan Moore (1965)).

Uji hidup pada kondisi operasinya yang normal biasanya mahal, memerlukan waktu yang lama, bahkan kadang-kadang menjadi tidak praktis bagi benda-benda yang sangat andal. Dengan uji hidup dipercepat (UHD) benda diuji pada kondisi (tegangan) yang lebih kuat dari kondisinya normal, sehingga tahan hidup benda itu diperpendek, dan dengan demikian dapat diamat data tahan hidup yang banyak dalam waktu yang singkat.

Dua macam UHD akan kita pelajari, yakni UHD tegangan konstan dan UHD tegangan bertingkat. Dalam UHD tegangan konstan, tiap benda dioperasikan pada tegangan tinggi yang konstan (mungkin berbeda-beda). Tahan hidup benda pada tegangan normal diperkirakan dengan metode regresi sebagai berikut. Dianggap adanya model hubungan antara tahan hidup dan tegangan yang konstan itu. Data uji hidup digunakan untuk memperkirakan (menaksir) parameter-parameter dalam model hubungan itu. Hubungan ini kemudian diekstrapolasikan untuk menaksir tahan hidup benda pada tegangan normal. Hal seperti ini sudah dipelajari, antara lain, oleh Nelson (1970), Nelson dan Hahn (1971), Singpurwalla (1973), Mann, et al (1974), Singpurwalla, et al (1975), Singpurwalla dan Al-Khayyal (1975), Bhattacharyya dan Soejoeti (1981).

Dalam UHD tegangan bertingkat , tegangan pada tiap unit tidak perlu konstan, tetapi dapat dinaikkan menjadi tingkat yang diinginkan pada waktu yang direncanakan. Benda diuji mulai pada tegangan rendah yang ditentukan, dapat tegangan normal (UHD parsial) , atau tegangan yang lebih tinggi dari tegangan normal (UHD penuh). Jika benda itu tidak "mati" dalam waktu tertentu, tegangannya dinaikkan sampai tingkat tertentu dan dibiarkan kontan sampa waktu tertentu pula. Seterusnya dapat dinaikkan lagi dan dibiarkan konstan, dan seterusnya, sampai benda itu "mati". Pola tegangan bertingkat dipilih untuk menjamin "kematian" dengan cepat.

Aplikasi UHD tegangan bertingkat telah ditunjukkan , antara lain, oleh Bora (1979), Nelson (1980), dan Miller dan Nelson (1983), masing-msing dalam hubungannya dengan kegagalan kabel isolasi di bawah tegangan voltase, uji hidup dioda dan kerusakan fluida isolasi dielektrik.

Seperti pada UHD tegangan konstan, kita menaksir parameter dalam model tahan hidup di bawah tegangan bertingkat. Parameter ini selanjutnya digunakan untuk menaksir tahan hidup benda pada kondisi operasi normal. Ini berarti kita memerlukan model yang menghubungkan distribusi tahan hidup tegangan bertingkat dengan distribusi tahan hidup tegangan konstan. Beberapa model telah dibicarakan dalam literatur. Nelson (1990) merumuskan model Cumulative exposure, model ini juga dibicarakan dalam Miller dan Nelson (1983). Kedua makalah itu membicarakan taksiran maksimum likelihood dengan distribusi tahan hidup Weibull dan fungsi percepatan Arrhenius atau inverse power law. De Groot dan Goel (1979) menggunakan model percepatan waktu (time acceleration) untuk UHD parsial. Dengan menganggap model tahan hidup eksponensial mereka mempelajari masalah rancangan optimal dalam kerangka teori keputusan Bayesian. Mattews dan Farewell (1982, 1985), dan Nguyen, et, al (1984) mempelajari change point hazard, serta taksiran parameter dan uji hipotesis. Model "regresi dua langkah untuk fungsi hazard" dipelajari oleh Anderson dan Senthilselvan (1982) yang cocok untuk mempelajari mortalitas kanker. Soejoeti (1991) membandingkan model-model yang ada, melakukan penaksiran denga model tahan hidup eksponensial untuk tegangan dua tingkat, tiga tingkat, dan UHD penuh. Bhattacharyya dan Soedjoeti (1989) mengusulkan model *tempered failure rate* serta menjelaskan sifat-sifatnya, dan menggunakannya untuk penaksiran parameter dengan model distribusi tahan hidup Weibull. Doksum dan Hoyland (1992) menggunakan model distribusi tahan hidup inversi Gauss dengan data disensor untuk UHD banyak tingkat. Mereka juga membicarakan naiknya tingkat tegangan secara kontinyu.

II. ANALISIS DATA UJI HIDUP

Dalam paragraf ini kita pelajari analisis data uji hidup yang terdiri dari : uji hidup pada kondisi operasinya yang normal, UHD dengan tegangan konstan, dan UHD tegangan bertingkat. Dalam ketiga situasi itu kita misalkan distribusi tahan hidup benda adalah distribusi eksponensial. Distribusi ini kita pilih karena sederhana matematikanya.

2.1. Uji Hidup Pada Kondisi Operasinya Normal

Misalkan n benda diuji pada kondisi operasinya normal sampai terjadi "kematian" ke r. Maka diperoleh observasi $Z_{(1)} < Z_{(2)} < \ldots < Z_{(r)}$ dalam sampel berukuran n.

Misalkan distribusi tahan hidup Z adalah eksponensial : $f(z) = \frac{1}{\theta}\exp\left[-\frac{z}{\theta}\right] : z > 0,\ \theta > 0$

Guna menaksir q , yakni mean tahan hidup benda kita punyai fungsi likehood :

$$L = \frac{n!}{(n-r)!}\frac{1}{\theta^r}\exp\left[-\left(\sum_{i=1}^{r} z_{(2)} + (n-r)t_{(r)}\right)/\theta\right]$$

Jika kita misalkan $T = \sum_{i=1}^{r} z_{(i)} + (n-r)z_{(r)}$, maka taksiran maximum likelihood $\hat{\theta}$ adalah: $\hat{\theta} = \frac{T}{r}$

Selanjutnya, guna menghitung taksiran interval bagi q dapat kita gunakan pivotal quantity : $V = \frac{2T}{\theta}$

Yang berdistribusi khi – kuadrat dengan derajat bebas 2r. Interval kepercayaan (1-a) 100% untuk q adalah $\frac{2T}{\chi_{(2r;1-\frac{\alpha}{2})}} \leq \theta \leq \frac{2T}{\chi_{(2r;\frac{\alpha}{2})}}$

Dengan $x^2_{(2r,p)}$ adalah kuantil ke p dari distribusi khi-kuadrat dengan derajat bebas 2r,

2.2. UHD Tegangan Konstan

Untuk menghasilkan perumusan model statistik guna menganalilsis data hasil percobaan UHD tegangan konstan, kita pandang variabel random Z yang merupakan tahan hidup suatu benda, komponen atau sistem. Distribusi peluang Z bergantung pada tingkat tegangan X yang dapat dikontrol dalam percobaan itu. Kita tulis dengan X_o tingkat tegangan pada kondisi operasinya yang normal. Dalam percobaan UHD tegangan konstan, dipilih beberapa tegangan yang lebih tinggi dari tegangan normal X_t, i = 1, 2, …,k.

Suatu sampel dengan n_i unit kita uji pada tegangan X_i dan tahan hidupnya dicatat, baik seluruhnya (sampel penuh) atau hanya beberapa yang "mati" dengan cepat (sampel disensor); i = 1,2,…,k. Jadi sampel ini dapat dipandang sebagai yang diambil dari distribusi tahan hidup dipercepat $f(z|\ x_i\ )$,i = 1,2,…,k. dengan f (z|x) adalah fungsi peluang Z pada tingkat tegangan x. Berdasarkan data seperti ini kita dapat melakukan inferensi untuk berbagai sifat fungsi peluang f(z|x), misalnya mean, beberapa persentil yang dipilih dan keandalan untuk waktu t tertentu.

Inferensi statistik dari data UHD tegangan konstan memerlukan dua unsur dasar perumusan model : distribusi tahan hidup benda, yakni f(z|x) pada tingkat tegangan tertentu X dan suatu bentuk fungsional yang menunjukkan ketergantungan parameter distribusi itu dengan tingkat tegangan X. Bentuk fungsional ini biasanya dinamakan fungsi percepatan. Ada beberapa fungsi percepatan yang pernah dipelajari orang. Tetapi disini hanya akan kita pelajari satu diantarnya, yakni percepatan log-linear.

Suatu persamaan umum, yang dikenal sebagai model log-linear, terdiri dari dua anggapan sebagai berikut : (i) distribusi tahan hidup benda merupakan anggota keluarga parametik tertentu yang memuat parameter skala 0 dan (mungkin) juga parameter bentuk h ; (ii) parameter skala itu itu bergantung pada tegangan X melalui hubungan log-linear log θ = b X, sedangkan h tak bergantung pada X. Disini X adalah vektor berdimensi p yang komponen-komponennya tidak harus merupakan variabel tegangan yang berbeda, tetapi dapat merupakan fungsi dari variabel yang sama.

Distribusi tahan hidup dipilih berdasarkan kriterium tertentu, misalnya teori keandalan, sederhananya prosedur inferensi, ataupun pengalaman empiris. Distribusi yang diturunkan dari gangguan Poisson, teori nilai ekstrim, atau tingkat laju kegagalan merupakan calon-calon yang baik untuk dipilih. Ini meliputi distribusi eksponensial, Weibull, gamma, log-normal, dan sebagainya. Anggapan adanya hubungan log linear dengan tingkat tegangan tidak hanya sederhana dan fleksibel, tetapi juga adanya hubungan dengan kinetika kimia, prinsip-prinsip mekanika kuantum, dan sebagainya. Beberapa model yang banyak digunakan dan cocok dengan perumusan log-linear adalah model laju reaksi Arrhenius, inverse power law, model Eyring, dan model generalized Eyring.

Inferensi statistik yang banyak dibicarakan dalam literatur meliputi penaksiran parameter dalam model, menghitung batas kepercayaan untuk mean tahan hidup benda pada kondisi operasinya normal (tegangan X_0) berdasarkan observasi tahan hidup benda pada kondisi yang lebih kuat dari kondisi normal, dan dengan berbagai model distribusi tahan hidup. Metode maximum likelihood, matrik informasi Fisher, taksiran linear, dan pendekatan asimtotik normal adalah metode-metode yang banyak digunakan.

Seperti telah disebut di atas, disini kita akan menganggap model distribusi tahan hidupnya eksponensial dan fungsi percepatannya log-linear, kemudian akan kita pelajari metode penaksiran linear dan maximum likehood, baik untuk sampel lengkap maupun sampel disensor tipe II. Kita hitung pula efisiensi asimtotik (EA) taksiran linear relatif terhadap taksiran maximum likelihood.

1. Sampel Lengkap

Misalkan suatu percobaan dilakukan dengan n tingkat tegangan X_i = i = 1, 2, … n, yang tidak harus semuanya sama. Misalkan pula satu benda diuji pada tegangan X_i sampai "mati", dan tahan hidupnya kita tulis Z_i. Kita anggap bahwa distribusi tahan hidup Z adalah eksponensial dengan fungsi peluang.

f(z) = $^{-1}$ exp (-z/q); z> 0, q > 0 dengan *q* = exp ((a + bx) atau log *q* = a + bx.

Kita tahu bahwa Z/*q* berdistribusi eksponensial standar, dan w = log (Z/*q*) berdistribusi nilai ekstrim standar dengan fungsi peluang
g (w) = exp (w) . exp (-exp (w))
Maka E (w) = *Y* '(1) = -0, 57722 dan

Var (w) = *Y'* ' (1) = 1,64493

Di mana Y (s) dan Y ' (s) adalah masing-masing fungsi digamma dan trigamma dengan argumen s. Fungsi digamma didefinisikan sebagai derivatif dari fungsi log gamma, yakni Y (x) = d log T (x) /dx dan fungsi trigamma adalah derivatif dari fungsi digamma, Y ' (x) = dY (x) /dx.

Nilai-nilai fungsi poligamma telah banyak ditabelkan.
Selanjutnya, kita misalkan

Y = log Z = log q + log (z/q)

= a + bX + W

Karens E (W) = -0, 57722, maka dapat kita tulis

Y_i = (a - 0,57722) + bX_i + e_i, i = 1,2, …, n

Dengan $e_i = W_i – E(w_i)$ adalah variabel random independen dan berdistribusi identik dengan mean = 0 dan variansi = 1, 64493. Maka metode kuadrat terkecil memberikan

$\tilde{\alpha} = \overline{Y} - \tilde{\beta}\overline{X} + 0{,}57722$ dan

$$\tilde{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \tilde{X})Y_i}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \tilde{X})^2}$$

Jika kita tulis x ', maka menurut Teorema Limit Pusat (lihat Jennrich (1969)) distribusi asimtotik $\sqrt{n}(\tilde{\zeta} - \zeta)$ adalah normal dengan mean = $\underset{\sim}{0}$ dan matriks kovariansi

$$\sum_{\underline{\zeta}} = 1{,}64493B^{-1}$$

dengan $B = \begin{bmatrix} 1 & m_1 \\ m_1 & m_2 \end{bmatrix}$ *dan* $m_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$ $m_2' = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

Untuk menghitung estimator titik bagi $\underset{\sim}{\zeta}' = (\alpha, \beta)$ dengan metode maximum likelihood kita punyai fungsi likelihood

$$L(\underset{\sim}{Y}; \underset{\sim}{\xi}) = \exp\left[\sum_{i=1}^{n} \{(Y_i - \alpha - \beta X_i) - \exp(Y_i - \alpha - \beta X_i)\}\right].$$

Persamaan likelihoodnya adalah

$$-n + \sum_{i=1}^{n} \exp(Y_i - \alpha - \beta X_i) = 0$$

$$-\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} X_i \exp(Y_i - \alpha - \beta X_i) = 0$$

Yang harus diselesaikan secara iteratif untuk memperoleh taksiran maksimum likelihood $\hat{\underset{\sim}{\xi}}$ = (a ,b).

Distribusi asimtotik $\sqrt{n}(\hat{\underset{\sim}{\xi}} - \underset{\sim}{\xi})$ adalah normal dengan mean = $\underset{\sim}{0}$ dan matriks kovariansi $\Sigma_{\hat{\xi}} = b^{-1}$

Efisiensi asimtotik (EA) taksiran kuadrat terkecil adalah

$$EA(\hat{\xi}) = [\psi(1)]^{-2} = 0{,}370$$

$$EA(\tilde{\alpha}) = EA(\tilde{\beta}) = [\psi(1)]^{-1} = 0{,}608$$

Perhatikan bahwa untuk satu observasi tiap tegangan, efisiensi asimtotiknya rendah. Tetapi jika ada observasi pada tiap tingkat tegangan X_i, kita dapat meningkatkan EA itu. Kita pandang suatu percobaan dengan n tingkat tegangan yang berbeda X_i. i = 1,2, …, n. dan pada tiap X_i kita uji k benda sampai "mati'. Maka kita punya observasi { Z_{ij}, j = 1,2,…,k; i=1,2,…,n}. Kita definisikan Z^*_i = $\sum_{j=1}^{k} z_j;\ i = 1,2,\ldots, n.$;

Z_i^* ini merupakan statistik cukup dan berdistribusi gamma dengan fungsi peluang :

$$f_{z^*}(z) = \frac{1}{\theta^k \Gamma(k)} z^{k-1} \exp(-z/\theta); z > 0.$$

Dengan langkah-langkah analog seperti di atas kita peroleh efisiensi asimtotik sebagai berikut :

$$EA(\tilde{\xi}) = [k\psi'(k)]^{-2}$$

$$EA(\tilde{\alpha}) = EA(\tilde{\beta}) = [k\psi'(k)]^{-1}$$

Efisiensi asimtotik ini bergantung pada k, dan untuk k = 1, EA ($\tilde{\alpha}$) sekitar 60% menjadi sekitar 90% untuk k = 5.

2. Sampel di sensor tipe II

Kita pandang percobaan dengan tingkat tegangan X_i , i = 1, 2, …, n, dan pada tiap X_i kita uji k benda. Percobaan dihentikan segera setelah "kematian" benda yang ke r. Kita tulis $Z_{i(j>}$; = 1, 2, …. R; i = 1, 2, …, n, tahan hidup benda ke j di bawah tegangan i. Selanjutnya kita definisikan $Y_{i(j>}$ = $\log_{i(j>}$.

Pertama-tama akan kita taksir l = log q berdasarkan statistik berurut $Y_{(j>}$, j = 1, 2, …, r. Kita punyai E $(_{(j>})$ = l = + E($V_{(j>}$) = l + m $_j$ dan kov ($Y_{(j>}$, $Y_{(j'>}$) = σ_{jj}. Disini $V_{(j>}$ adalah statistik berurut dari g (v), yaitu distribusi nilai ekstrim standar. Nilai-nilai m $_j$ dan $\sigma_{jj'}$ telah ditabelkan untuk berbagai ukuran sampel k (lihat Sarhan dan Greenberg (1962)).

Dengan merumuskan

$$Y_j^* = \lambda + e_j,\ j = 1, 2, \ldots, r$$

Dengan Y_j^* = Y $_{(j>}$ dan e_j mempunyai mean dan matriks kovariansi å = (a $_{jj'}$) maka taksiran untuk l dan variansinya adalah (lihat Lloyd (1952)) :

$$\tilde{\lambda} = \left(\underset{\sim}{1}' \Sigma^{-1} \underset{\sim}{1}\right)^{-1} 1' \Sigma^{-1} \underset{\sim}{Y}^* = \frac{\sum_{j=i}^{r}\left[\sum_{j'=1}^{r} \alpha^{jj'}\right](Y_{(j)} - \mu_j)}{\left[\sum_{j=1}^{r}\sum_{j'=1}^{r} \alpha^{jj'}\right]}$$

$$\alpha^2 = (\underset{\sim}{1}' \Sigma^{-1} \underset{\sim}{1})^{-1} = \left[\sum_{j=i}^{r}\sum_{j'=1}^{r} \alpha^{jj'}\right]^{-1}$$

dengan a $^{jj'}$ adalah elemen (j, j') inverasi matriks kovariansi (a $_{jj'}$). Jadi, dari nilai-nilai m $_j$ dan a $_{jj'}$ yang sudah ditabelkan $\tilde{\lambda}$, taksiran $\tilde{\lambda}$ dari variansinya σ^2, dibawah tiap tingkat tegangan X_i, i = 1, 2, …, n dapat dihitung.

Selanjutnya kita pandang hubungan linear

$$\tilde{\lambda}_i = \alpha + \beta X_i + e_i';\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Dengan e_i' adalah variabel random independen dan berdistribusi identik dengan mean 0 dan variansi yang diketahui σ^2. Taksiran kuadrat terkecil $\tilde{\alpha}$ dan $\tilde{\beta}$ adalah :

$\tilde{\alpha} = \tilde{\bar{\lambda}} - \tilde{\beta}\tilde{\bar{X}}$ dan

$$\tilde{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\tilde{\lambda}_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

dengan $\tilde{\bar{\lambda}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\lambda}_i$

dan $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i.$

Untuk distribusi $\tilde{\xi}' = (\alpha, \beta)$. Teorema 7 dalam Jennrich (1969) berlaku. Maka distribusi asimtotik $\sqrt{n}(\tilde{\xi} - \xi)$ adalah normal dengan mean Q dan matriks kovariansi $\sigma^2\, \beta^{-1}$, dengan

$$B = \begin{bmatrix} 1 & m_1 \\ m_1 & m_2 \end{bmatrix},$$

Selanjutnya, guna menghitung taksiran maximum likelihood kita fungsi likelihood

$$L(\tilde{Y}; \xi) = \exp\left[\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}\{(Y_{i(j)} - \alpha - \beta X_i) - \exp(Y_{i(j)} - \alpha - \beta X_i - (k-r)\sum_{i=1}^{n}\exp(Y_{i(j)} - \alpha - \beta X_i)\}\right]\right.$$

Persamaan likelihoodnya adalah

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=i}^{r}(-1 + \exp(Y_{i(j)} - \alpha - \beta X_i)) + (k-r)\exp(Y_{i(r)} - \alpha - \beta X_i)\right] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}X_i\left[\sum_{j=i}^{r}(-1 + \exp(Y_{i(j)} - \alpha - \beta X_i)) + (k-r)\exp(Y_{i(r)} - \alpha - \beta X_i)\right] = 0$$

Yang harus diselesaikan secara iteratif untuk memperoleh taksiran $\hat{\xi} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta})$. Distribusi asimtotik untuk adalah $N(\tilde{O}; r^{-1}B^{-1})$

Sehingga efisiensi asimtotik taksiran kuadrat terkecil adalah

$EA(\tilde{\xi}) = (r\sigma^2)^{-2}\ dan$

$EA(\tilde{\alpha}) \ = EA(\tilde{\beta}) = (\sqrt{\ }\sigma^2)^{-1}$

Tabel di bawah memberikan nilai-nilai EA (α^2) untuk k = 6 dan r £ k.

$\mathrm{EA}(\tilde{\alpha})$ untukk = 6 dan r $\leq$ k

r	1	2	3	4	5	6
$EA(\tilde{\alpha})$	0,0608	0,775	0,842	0,877	0,897	0,907

Untuk memperoleh nilai-nilai EA di atas ini, variansi a ^{2} harus dihitung dengan pertama-tama mengiversikan matriks (s $_{jj})_{rxr'}$ yang elemen-elemennya diambil dari Sarhan dan Greenberg (1962).

Dapat kita catat bahwa untuk distribusi eksponensialnya, pendekatan alternatif berikut juga bermanfaat guna memperoleh taksiran kuadrat terkecil $\tilde{\xi}' = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ Kita pandang tahan hidup berurut $Z_{i(1)}$ ……, $Z_{i(r)}$ dan kita definisikan

$$z_i^{*} = \sum_{j=1}^{r} Z_{i(j)} + (k-r) Z_{i(r)}; \quad \mathrm{I} = 1,2,\ldots,n.$$

Statistik Z_i^{*} ini adalah statistik cukup dan berdistribusi independen Gamma (1, r). Mean dan variansi $Z_{oi} \equiv \log Z_i^{*}$ adalah

$E(Z_{oi}) = a + b\, X_i + Y\ (r)$

dan

$var\ (Z_{oi}) = Y\ '(r)$

Menggunakan hubungan linear

$Z_{oi} = (a + Y\ (r)) + b\, X_i + e_i$;

i = 1, 2, …, n

dengan e_i variabel random independen dan berdistribusi identik dengan mean = 0 dan variansi yang diketahui Y ´ (r), kita peroleh taksiran kuadrat terkecil

$$\tilde{\alpha}_s = \bar{z}_o - \tilde{\beta}_s \bar{X} - \psi(r);$$

$$\tilde{\beta}_s = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})z_{oi}}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

dengan $\bar{z}_o = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_{oi}$ Distribusi asimtotik $\sqrt{n}\,(\tilde{\xi}_s - \xi)$ adalah normal dengan mean Q dan matriks kovariansi *Y ´* (r)B^{-1}

Efisiensi asimtotik taksiran kuadrat terkecil ini adalah

$$EA(\tilde{\xi}_s) = (r\psi'(r))^{-2};$$

$$EA(\tilde{\alpha}_s) = EA(\tilde{\beta}_s) = r\psi'(r))^{-1}$$

Tabel di bawah memberikan nilai-nilai EA( ) untuk beberapa nilai r

$EA(\tilde{\alpha}_s)$ untuk beberapa r.

r	1	2	3	4	5	6
EA ($\tilde{\alpha}_s$)	0,608	0,775	0,884	0,881	0,904	0,919

Menarik untuk dicatat bahwa metode ini memberikan taksiran yang mempunyai efisiensi asimtotik yang diumumkan lebih tinggi dari yang diperoleh dengan metode di atas. Lagi pula untuk menggunakan metode di atas kita harus terlebih dahulu mengiversikan matriks $(a_{jj'})_{rxr}$ yang hitungannya makin rumit untuk r yang makin besar.

III. UHD TEGANGAN BERTINGKAT

Disini kita pelajari penaksiran maximum likelihood dalam model distribusi tahan hidup eksponensial dan model tegangan bertingkat *tempered failure rate*. Parameter-parameter dalam model ditaksiran berdasarkan observasi tahan hidup n benda yang dipasang pada uji hidup dipercepat tegangan bertingkat. Pertama-tama kita pandang UHD tegangan bertingkat parsial dengan dua tingkat. Selanjutnya UHD tegangan bertingkat penuh dengan model regresi log q = g + d V.

3.1. UHD Tegangan Bertingkat Parsial

Misalkan n benda dipasang pada uji hidup dengan tegangan normal X_o. Setelah terdapat r benda yang "mati", segera tegangan diubah menjadi X_1 (yang lebih kuat dari tegangan normal X_o) dan berlaku untuk (n-r) benda sisanya yang kita amati sampai semuanya "mati". Kita tulis tahan hidup berurut dibawah tegangan X_o sebagai $Z_1 \leq Z_2 \leq \ldots \leq Z_r \leq \ldots \leq Z_n$.

Ingat, bahwa yang benar-benar diamati hanya $Z_1 \leq Z_2 \leq \ldots \leq Z_r$, sedangkan yang lain tidak.

Tahan hidup berurut di bawah X_1 yang kita amati adalah $Y_{r+1} \leq \ldots \leq Y_n$. Sehingga dengan percobaan seperti itu, data tahan hidup berurut dapat kita tulis sebagai

$$Z_1 \leq Z_r \leq \ldots \leq Y_{r+1} \leq \ldots \leq Y_n .$$

dengan $Z_1 \leq \ldots \leq Z_r$ diamati di bawah X_o, dan $Y_{r+1} \leq \ldots . Y_n$ diamati di bawah X_1.

Model kita menyatakan

$$Y_{r+i} = Z_r + \frac{1}{\alpha}(Z_{r+i} - Z_r) \, ; \quad i = 1, 2, \ldots, (n-r)$$

$$= \frac{1}{\alpha} Z_{r+i} + (1 - \frac{1}{\alpha}) Z_r$$

Fungsi peluang bersama $Z_1 \leq \ldots Z_r \leq Y_{r+1} \leq \ldots \leq Y_n$ dapat diperoleh dari fungsi peluang bersama (Z_1. …, Z_r, … , Z_n) dengan menggunakan hubungan di atas ; yakni kita pandang Z_1, …, Z_r dan variabel sisanya ditranformasikan dengan

$$Z_{r+1} = \alpha Y_{r+1} - (\alpha - 1) Z_r, \ i = 1, 2, \ldots (n\text{-}r).$$

Maka fungsi peluang bersama (Z_1, …, Z_r , Z_{r+1}, …, Y_n)

$$f(\underset{\sim}{z}, \underset{\sim}{y}) = n! \prod_{i=1}^{r} f(Z_i) \prod_{i=1}^{r} f(\alpha y_{r+1} - (\alpha - 1) Z_r) . \alpha^{n-r}$$

Fungsi likelihoodnya (untuk model distribusi eksponensial) adalah

$$L = n! \frac{1}{\theta^r} \exp \left[\frac{\sum_{i}^{r} Z_i}{\theta} \right] \left[\frac{\alpha}{\theta} \right]^{n-r} \exp \left[- \frac{\alpha}{\theta} \sum_{i=r+1}^{n} - \frac{(\alpha-1)}{\theta} (n - r) Z_r \right]$$

Dengan menuliskan $\frac{\alpha}{\theta} = \lambda$, fungsi log likelihoodnya :

$$\ell = \log n! - r \log \theta - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{r} Z_i + (n-r) \log \lambda - \lambda \sum_{r+1}^{n} Y_i$$

$$- \lambda (n-r) z_r + \frac{1}{\theta} (n-r) Z_r$$

Sehingga taksiran maximum likelihoodnya adalah

$$\overline{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{r} Z_i - (n-r) Z_r}{r}$$

dan

$$\hat{\lambda}^{-1} = \frac{\sum_{i+1}^{n} Y_i + (n-r) Z_r}{(n-r)}$$

Maka taksiran maximum likelihoodnya untuk a adalah

$$\hat{\alpha} = \hat{\theta} \hat{\lambda}$$

Guna menghitung interval kepercayaan bagi q kita gunakan *pivotal quantity* 2T/q , dengan $T = \sum_{i=1}^{r} Z_i - (n-r) Z_r$, yang berdistribusi khikuadrat dengan derajat bebas 2r. Sedangkan untuk a kita gunakan pivotal quantity :

$$\frac{\hat{\alpha}}{\alpha} = \frac{T_1 / r}{\alpha T_2 / (n-r)} \; dengan \; T_2 = \frac{\sum_{r+1}^{n} Y_i + (n-r) Z_r}{(n-r)} = \frac{2T_1 / [\theta(2r)]}{2\lambda T_2 / [2(n-r)]}$$

yang berdistribusi F(2r ; 2 (n-r)), karena 2l T_2 berdistribusi khikuadrat dengan derajat bebas 2(n – r).

3.2. UHD Tegangan Bertingkat Penuh

Kita pandang UHD tegangan bertingkat penuh dan sebagai tegangan normal serta tegangan-tegangan tinggi.

Misalkan n benda yang dipasang pada uji hidup dengan tegangan X_1. Setelah terdapat r benda yang "mati" segera tegangan diubah menjadi X_2 dan berlaku untuk (n – r) benda sisanya yang kita amati sampai semuanya "mati". Tahan hidup berurut dapat ditulis sebagai Z_1 £ … £ Z_r £ Y_{r+1} £ … £ Y_1 dengan Z_1 £ … £ Z_r diamati di bawah tegangan Y_1 dan Y_{r+1} £ … £ Y_n diamati di bawah tegangan X_2.

Model kita adalah

$$Y_{r+1} = Z_r + \frac{1}{\alpha}(Z_{r+i} - Z)$$

$$= \frac{1}{\alpha} Z_{r+i} + (1 - \frac{1}{\alpha}) Z_r , \quad i = 1, 2, \dots, (n - r).$$

Maka fungsi likelihoodnya adalah

$$L = n! \prod_{i=1}^{r} f(Z_i) \prod_{i=1}^{n-r} f(\alpha y_{r+1} - \alpha(1-\alpha) Z_r) \alpha^{n-r}$$

Dengan model distribusi eksponensial kita punyai

$$\mathrm{L} = \mathrm{n}! \frac{1}{\theta^{r}} \exp\left[-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{r} Z_i\right]\left[\frac{\alpha}{\theta}\right]^{n-r} \exp\left[-\frac{\alpha}{\theta}\sum_{r+1}^{n} Y_i + \left[\frac{\alpha}{\theta} - \frac{1}{\theta}\right](n-r) Z_r\right]$$

Dengan $\lambda = \frac{\alpha}{\theta}$, maka fungsi likelihoodnya adalah

$$\ell = \log n! - r \log \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{r} Z_i + (n-r) \log \lambda - \lambda \sum_{r+1}^{n} Y_i + (\lambda - \frac{1}{\theta})(n-r) Z_r .$$

Model UHD kita adalah

Log q $^{-1}$ = g + d X_1

dan

log l = g + d X_2.

Maka fungsi likelihood itu menjadi :

$$\ell = \log n! - r(\gamma + \delta X_1) - T_1 \exp(\gamma + \delta X_1) + (n - r) - (\gamma + \delta X_2) - T_2 \exp(\gamma + \delta X_2)$$

Dengan $T_1 = \sum_{i=1}^{n} Z_i + (n - r) Z_r$ dan $T_2 = \sum_{i=r+1}^{n} Y_i - (n - r) Z_r$

Selanjutnya, dapat kita peroleh persamaan likelihood sebagai berikut :

T_1 exp(g + d X_1) + T_2exp (g + d X_2) = n

T_1 X_1 exp(g + d X_1) + T_2 X_2exp (g + d X_2) = (n – r)X_2 + rX_1

Penyelesaiannya adalah

$$\hat{\delta} = \left[\log\frac{T_1}{r} - \log\left(\frac{T_2}{n-r}\right)\right] / (X_2 - X_1)$$ dan

$$\hat{\gamma} = -\log\frac{T_1}{r} - \hat{\delta}X_1$$

Guna menghitung interval kepercayaan untuk d kita gunakan pivotal quantity

$$\frac{\exp\left[\hat{\delta}(X_2 - X_1)\right]}{\exp\left[\delta(X_2 - X_1)\right]} = \left[\frac{2T_2}{2r\theta}\right] \Big/ \left[\frac{2\lambda T_1}{2(n-r}\right]$$

Yang berdistribusi F (2r ; 2 (n – r))).

Sedangkan untuk g kita pandang kuantitas :

Yang distribusinya tidak dapat diperoleh dalam bentuk rumus sederhana. Karena itu interval kepercayaan untuk g hanya dapat diperoleh secara pendekatan saja. Salah satu cara pendekatan adalah menggunakan asimtotik normal, jika sampelnya cukup besar.

Selanjutnya, inferensi untuk tegangan normal X_o dapat diperoleh.

KESIMPULAN

Dalam uraian di atas kita menggunakan model distribusi tahan hidup ekspopnensial yang matematiknya sangat sederhana. Dengan model distribusi tahan hidup yang lain tentu matematiknya lebih rumit, dan tentu saja akan dijumpai hal-hal yang lebih menarik (pelajari artikel-artikel dalam referensi dan yang lain-lain).

Beberapa masalah di bawah itu kiranya dapat digunakan sebagai petunjuk untuk penelitian-penelitian yang akan datang.

a. Dalam UHD tegangan bertingkat belum ada yang mempelajari penggunaan model distribusi tahan hidup Bernbaum-Saunders. Karena itu kiranya hal ini akan menarik untuk diteliti.

Aplikasi distribusi Bernbaum-Saunders dalam UHD tegangan konstan telah dipelajari, antara lain, oleh Rieck dan Nedelman (1991).

b. Analisis nonparametrik untuk UHD tegangan bertingkat adalah masalah lain yang mungkin juga menarik untuk diteliti. Pembahasannya untuk UHD tegangan konstan telah disampaikan antara lain, oleh Schmoyer (1991).
c. Aplikasi inferensi Bayesian dalam UHD tegangan konstan maupun tegangan bertingkat adalah hal lain lagi yang menarik untuk diteliti. Penelitian di sini tentu akan sangat kaya, karena tiap model distribusi tahan hidup akan merupakan masalah yang berbeda.
d. UHD tegangan bertingkat dengan tegangan kontinu baru ditinjau secara selintas dalam Doksum dan Hoyland (1992). Penelitian yang lebih luas tentu masih diperlukan.
e. Model-model lain yang belum dipelajari orang mungkin dapat kita kembangkan dan teliti. Kreativitas dalam penelitian sangat diperlukan.

REFERENSI

1. Anderson, JA dan Senthilselvan, A. 1982. A two-step regression model for hazard function. *Applied Statistics*. 31. Hlm 44-51.
2. Battacharyya, GK dan Soejoeti, Z. 1981. On the Performance of Least Squares Estimators in Type II Censored Accelerated Life Tests. *IAPQR Transactions Journal Ind. Assoc. for Productivity, Quality & Reliability*. 6. No. 1. Hlm 39-55.
3. Battacharyya, GK dan Soejoeti, Z. 1989. A Tempered Failure Model for Step-Stress Accelerated Life Test. *Communications in Statistics-Theory and Methods*. 18(5). Hlm 1627-1643.
4. Bora, JS. 1979. Step-stress Accelerated Life Testing of Diodes. *Microelectron Reliability*. 19. Hlm 279-280.
5. Cohen, AC. 1976. Progressively Censored Sampling in the Three Parameter Log-normal Distribution. *Technometrics*. 17. Hlm 99-103.
6. De-Groot, M. H. dan Goel, P. K. 1979. Bayesian Estimation and Optimal Designs in Partially Accelerated Life Testing. *Noval Research Logistic Quarterly*. 26. Hlm 223-235.
7. Doksum, K. A. dan Hoyland, A. 1992. Models for Variable-stress Accelerated Life Testing Experiments Based on Wiener Processes and the Inverse Gaussian Distribution. *Technometrics*. 34. Hlm 74-82.
8. Epstein, B dan Sobel, M. 1953. Life Testing. *Journal of Am. Stat. Assoc*. 48. Hlm 486-502.
9. Gupta , SS dan Groll, PA. 1961. Gamma Distribution in Acceptance Sampling Based on Life Test. *Journal of Am. Stat*. Assoc. 56. Hlm 942-970.
10. Harter, H. L. dan Moore, A. H. 1965. Maximum Likelihood Estimation of the Parameters of Gamma and Weibull Population From Complete and From Censored Samples. *Technometrics*. 7. Hlm 639-643.
11. Jennrich, J. I. 1969. Asymptotic Properties of Non-linear Least Squares Estimators. *Ann. Math. Stat*. 40. Hlm 633-643.
12. Lawless, J. F. 1973. On The Estimation of Safe Life When The Underlying Life Distribution is Weibull. *Technometrics*. 15. Hlm 857-865.
13. Lloyd, E. H. 1952. Least Squares Estimation of Location and Scale Parameters Using Order Statistics. *Biometrika*. 39. Hlm 88-95.

14. Mann, N. R. 1971. Best Linear Invariant Estimation for Weibull Parameters Under Progresive Censoring. *Technometrics*. 13. Hlm 521-533.
15. Mann, N. R.; Schafer, R. E.; dan Simpurwalla, N. D. 1974. *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data*. Wiley. New York.
16. Mattews, D. E. dan Farewell, V. T. 1982. On Testing For Constant Hazard Against a Change Point Alternative. *Biometrics*. 38. Hlm 463-468.
17. Mattews, D. E. dan Farewell, V. T. 1985. On a Singularity in the Likelihood For a Change Point Hazard Rate Model. *Biometrika*. 72. Hlm 703-704.
18. Miller, R dan Nelson, W. B. 1983. Optimal Simple Step-Stress Plans For Accelerated Life Testing. *IEEE Transactions on Reliability*. R-32. Hlm 59-65.
19. Nelson, W. B. 1980. Accelerated Life Testing Step-Stress Models and Data Analysis. *IEEE Transactions on Reliability*. R-29. Hlm 103-108.
20. Nelson, W. B., dan Hahn, G. J. 1971. Regression Analysis of Censored Data-Linear Estimation Using Ordered Observations. *General Electric Corporate Research and Development TIS Report*. 71. Hlm 122.
21. Nguyen, N. T., Ragers, G. S. dan Walker, E. A. 1984. Estimation in Change Point Hazard Rate Models. *Biometrika*. 71. Hlm 299-304.
22. Rieck, J. R. dan Nedelman, J. R. 1991. A Log-Linear Model for the Birnbaum-Saunders Distribution. *Technometrics*. 33. Hlm 175-186.
23. Sarhan, A. E. dan Greenberg, B. G. 1962. *Contribution to Order Statistics*. Wiley. New York.
24. Schmoyer, R. L. 1991. Nonparametric Analysis for Two-level Single-stress Accelerated Life Test. *Technometrics*. 33. Hlm 51-60.
25. Singpurwalla, N. D. 1973. Inference From Accelerated Life Test Using Arrhenuis Type Reparameterization. *Technometric*s. 15. Hlm 289-299.
26. Singpurwalla, N. D. dan Al-Kayyal, F. A. 1975. Inference From Accelerated Life Tests Using the Inverse Power Law Models. *Technical Report.* No T-318. School of Engineering and Applied Science. The George Washington University.
27. Singpurwalla, N. D.; Castellino, V. C.; dan Goldshen, D. Y. 1975. Inference from Accelerated Life Tests Using Eyring Type Reparameterization. *Naval Research Logistic Quarterly*. 22. Hlm 289-296.
28. Soejoeti, Z. 1991.Estimasi Uji Hidup Dipercepat Tegangan Bertingkat Dengan Model Ekspponensial. *Forum Statistik*. X. Hlm 51-62.
29. Zelen, M. 1959. Factorial Experiments in Life Testings. *Technometric*s. 1. Hlm 269-288.