ω – SUBSEMIRING *FUZZY*

Saman Abdurrahman
FMPA Universitas Lambung Mangkurat
e-mail: saman@ulm.ac.id

ABSTRACT

Mapping ρ is called a fuzzy subset of an empty set of S if ρ is the mapping from S to the close interval $[0,1]$. A fuzzy subset ρ introduced into this paper is a fuzzy subset of semiring S, defined by

$$\rho(a+d) \geq \rho(a) \wedge \rho(d) \text{ and } \rho(ad) \geq \rho(a) \wedge \rho(d),$$

for each $a, d \in S$ so that a fuzzy subset ρ is called a fuzzy subsemiring from a semiring S. In this paper, investigated the basic nature of subsemiring fuzzy ρ from a semiring S which includes intersect with two or more fuzzy subsemiring from a semiring S is always a fuzzy subsemiring from a semiring S. Moreover, it was introduced to the concept of ω – fuzzy subsemiring from a semiring S which is denoted by ρ^{ω}. Finally, investigated the minimal conditions that guarantee the existence of ω – fuzzy subsemiring ρ^{ω} and the intersection of two or more ω – fuzzy subsemiring ρ^{ω} of a semiring S is always an ω – fuzzy subsemiring ρ^{ω} of a semiring S.

Keywords: fuzzy subset, fuzzy semiring, ω – fuzzy subsemiring

ABSTRAK

Pemetaan ρ disebut subset *fuzzy* dari himpunan tidak kosong S jika ρ merupakan pemetaan dari S ke interval tutup $[0, 1]$. Subset *fuzzy* ρ yang diibahas pada paper ini adalah subset *fuzzy* dari semiring S, yang memenuhi kondisi

$$\rho(a+d) \geq \rho(a) \wedge \rho(d) \text{ dan } \rho(ad) \geq \rho(a) \wedge \rho(d),$$

untuk setiap $a, d \in S$ sedemikian sehingga subset *fuzzy* ρ disebut subsemiring *fuzzy* dari semiring S. Pada paper ini, diselidiki sifat dasar dari subsemiring *fuzzy* ρ dari semiring S, yang meliputi irisan antara dua atau lebih subsemiring *fuzzy* dari semiring S selalu merupakan subsemiring *fuzzy* dari semiring S. Selain itu, pada paper ini diperkenalkan konsep ω – subsemiring *fuzzy* dari semiring S, yang dinotasikan dengan ρ^{ω}. Akhirnya, diselidiki kondisi minimal yang menjamin eksistensi dari ω – subsemiring *fuzzy* ρ^{ω}, dan irisan dua atau lebih ω – subsemiring fuzzy ρ^{ω} dari semiring S selalu merupakan ω – subsemiring *fuzzy*ρ^{ω} dari semiring S.

Kata kunci: subset *fuzzy*, semiring *fuzzy*, ω – subsemiring *fuzzy*

Perkembangan penelitian bidang aljabar dari waktu ke waktu, semakin berkembang dan banyak variasinya, baik mengkaji bidang aljabar itu sendiri ataupun mengaplikasikan dengan bidang kajian lain, diantaranya mengaplikasikan dengan konsep himpunan *fuzzy* yang diperkenalkan oleh Zadeh (1965) sehingga muncul konsep baru dalam bidang aljabar, yaitu aljabar *fuzzy*. Kajian aljabar *fuzzy* dipelopori oleh Rosenfeld (1971), yaitu mengaplikasikan konsep grup dengan himpunan *fuzzy*, yang selanjutnya dikenal dengan konsep grup *fuzzy*. Konsep grup *fuzzy*, merupakan konsep dasar yang dijadikan pondasi dalam mengkontruksi definisi ataupun sifat terkait oleh peneliti selanjutnya, dalam mengkaji struktur aljabar *fuzzy* lainnya, diantaranya: Abdurrahman (2018) memperkenalkan konsep interior subgrup *fuzzy* pada struktur grup, Ahsan, Mordeson, & Shabir (2012) memperkenalkan konsep semiring *fuzzy* pada struktur semiring, dan Sharma (2013a) memperkenalkan konsep α – subgrup *fuzzy* pada struktur grup.

Pada paper ini, akan diperkenalkan konsep subsemiring *fuzzy* dari semiring S, dan diselidiki beberapa sifat yang terkait. Semiring merupakan salah satu perluasan dari ring dengan menghilangkan beberapa aksioma ring sedemikian sehingga $(S,+)$ adalah grup abelian, $(S,.)$ adalah semigrup yang tidak harus komutatif, dan dipenuhi sifat distributif kiri dan distributif kanan.

Sifat yang akan dikaji pada semiring *fuzzy* meliputi irisan dari dua atau lebih subsemiring *fuzzy*, apakah akan terbentuk subsemiring *fuzzy* dari semiring S atau tidak. Selain itu, akan dikaji konsep ω – subsemiring *fuzzy* dari semiring S, yang dinotasikan dengan ρ^{ω}, dengan definisi ω – subset *fuzzy* dari semiring S,diinduksi dari penelitian Sharma (2013b) dan diselidiki eksistensi dari ω – subsemiring *fuzzy* dari semiring S, dengan melihat kondisi dari ρ, apakah syarat ρ cukup subset *fuzzy* saja atau harus subsemiring *fuzzy*, serta akan diselidiki, apakah irisan dua atau lebih ω – subsemiring *fuzzy* dari semiring S, apakah akan menghasilkan ω – subsemiring *fuzzy* dari semiring S atau tidak.

METODE

Penelitian yang kami lakukan, merupakan kajian teori yang dirujuk dari buku ataupun jurnal, khususnya yang berkaitan dengan semiring, subset *fuzzy*, dan subsemiring *fuzzy* ataupun tulisan lainnya yang analog, pada model struktur aljabar fuzzy lainnya. Berikut disajikan definisi: semiring, subsemiring, subset *fuzzy*, irisan dua subset *fuzzy,* level subset, subsemiring *fuzzy,* dan ω – subset *fuzzy,* yang sangat mendukung pada pembentukan definisi ataupun sifat pada bagian pembahasan.

Semiring merupakan salah satu perluasan dari ring, dengan menghilangkan beberapa aksioma pada ring. Menurut Ahsan, Mordeson, & Shabir (2012), himpunan $S(\neq \emptyset)$ disebut semiring, jika S dilengkapi dengan dua operasi biner penjumlahan $"+"$ dan perkalian $"\cdot"$ sedemikian sehingga $(S,+)$ adalah semigrup abelian, dan $(S,\cdot)$ adalah semigrup (tidak harus komutatif), serta memenuhi kondisi:

$$a\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot c \text{ dan } (a+d)\cdot c=a\cdot c+d\cdot c.$$

untuk setiap $a,c,d\in S$. Selanjutnya, Jagatap (2014) menyatakan bahwa: Subset $K(\neq \emptyset)$ dari semiring S disebut subsemiring dari semiring S, jika

$$a+d\in K \text{ dan } a\cdot d\in K.$$

untuk setiap $a,d\in K$,

Selanjutnya, penulisan $a\cdot c$, dapat dituliskan dengan ac.

Definisi 2.1. (Mordeson & Bhutani, 2005)**.** Subset *fuzzy* ρ dari *himpunan* $S(\neq \emptyset)$ adalah suatu fungsi dari S ke interval tutup $[0,1]$.

Definisi 2.2. (Mordeson & Bhutani, 2005)**.** Misalkan ρ dan δ adalah subset *fuzzy* ρ dari himpunan S, maka $(\rho \cap \delta)(x) \overset{\text{def}}{=} \rho(x) \wedge \delta(x)$, untuk setiap $x \in S$.

Definisi 2.3. (Mordeson & Bhutani, 2005)**.** Diberikan subset *fuzzy* ρ dari himpunan S dan $a \in [0,1]$. Level subset dari ρ dinotasikan dengan ρ_a dan $\rho_a \overset{\text{def}}{=} \{x \in S | \rho(x) \geq a\}$.

Definisi 2.4. (Ahsan, Mordeson, & Shabir, 2012)**.** Subset *fuzzy* ρ dari semiring S disebut subsemiring *fuzzy* dari S jika untuk setiap $a, d \in S$ berlaku*:*

$$\rho(a+d) \geq \rho(a) \wedge \rho(d) \text{ dan } \rho(ad) \geq \rho(a) \wedge \rho(d).$$

Berikut diberikan definisi $\omega -$ subset *fuzzy* dari semiring S, yang diinduksi dari Sharma (2013b).

Definisi 2.5. Misalkan S adalah semiring dan $\omega \in [0,1]$. Subset *fuzzy* ρ dari S disebut $\omega -$ subset *fuzzy*, yang dinotasikan dengan ρ^{ω}, jika

$$\rho^{\omega}(a) = \rho(a) \wedge \omega$$

untuk setiap $a \in S$.

Selanjutnya, notasi ρ^{ω} menyatakan ω – subsemiring fuzzy dari semiring S.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini, disajikakan sifat-sifat dari ω – subsemiring *fuzzy* dari semiring S dalam bentuk Teorema, Lemma ataupun Akibat. Sifat-sifat tersebut, diperoleh dengan cara menginduksi dari penelitian-penelitian sebelumnya, yang terlampir pada referensi, sehingga terbentuk sifat pada struktur subsemiring *fuzzy.*

Teorema 3.1. Misalkan ρ adalah subsemiring *fuzzy* dari semiring S, maka ρ^{ω} adalah subsemiring *fuzzy* dari S.

Bukti:

Misalkan ρ adalah subsemiring *fuzzy* dari semiring S, maka untuk setiap $a, d \in S$ berlaku:

$$\begin{aligned} \rho^{\omega}(a+d) &= \rho(a+d) \wedge \omega \\ &\geq (\rho(a) \wedge \rho(d)) \wedge \omega \\ &= (\rho(a) \wedge \omega) \wedge (\rho(d) \wedge \omega) \\ &= \rho^{\omega}(a) \wedge \rho^{\omega}(d), \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \rho^{\omega}(ad) &= \rho(ad) \wedge \omega \\ &\geq (\rho(a) \wedge \rho(d)) \wedge \omega \\ &= (\rho(a) \wedge \omega) \wedge (\rho(d) \wedge \omega) \\ &= \rho^{\omega}(a) \wedge \rho^{\omega}(d). \end{aligned}$$

Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 2.4, ρ^{ω} adalah subsemiring *fuzzy* dari S. ■

Konvers dari Teorema 3.1 tidak selalu berlaku. Sebagai ilustrasi, diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ terhadap operasi penjumlahan dan perkalian, $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ adalah semiring. Misalkan ρ adalah subset *fuzzy* dari $\mathbb{N}$, dengan $\rho(2n) = 0{,}6$ dan $\rho(2n-1) = 0{,}9$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Subset *fuzzy* ρ bukan subsemiring *fuzzy* dari semiring $\mathbb{N}$, karena terdapat$1,3 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga kondisi **Definisi 2.4.** Tidak dipenuhi oleh ρ, yaitu:

$$\rho(3+1) = \rho(4) = 0{,}6 < 0{,}9 = \rho(3) \wedge \rho(1).$$

Selanjutnya, dipilih $\omega = 0{,}09$ maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, diperoleh:

$$\rho(2n) > \omega \text{ dan } \rho(2n-1) > \omega.$$

Akibatnya, untuk setiap $a, d \in \mathbb{N}$, berlaku:

$$\rho(a+d) = \rho(2n) > \omega \text{ atau } \rho(a+d) = \rho(2n-1) > \omega,$$

dan

$$\rho(ad) = \rho(2n) > \omega \text{ atau } \rho(ad) = \rho(2n-1) > \omega.$$

Oleh sebab itu,

$$\begin{aligned} \rho^{\omega}(a+d) &= \rho(a+d) \wedge \omega \\ &= \omega \\ &= \omega \wedge \omega \\ &= (\rho(a) \wedge \omega) \wedge (\rho(d) \wedge \omega) \\ &= \rho^{\omega}(a) \wedge \rho^{\omega}(d), \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \rho^{\omega}(ad) &= \rho(ad) \wedge \omega \\ &= \omega \\ &= \omega \wedge \omega \\ &= (\rho(a) \wedge \omega) \wedge (\rho(d) \wedge \omega) \\ &= \rho^{\omega}(a) \wedge \rho^{\omega}(d). \end{aligned}$$

Jadi, untuk setiap $a, d \in S$ berlaku:

$$\rho(a+d) \geq \rho(a) \wedge \rho(d) \text{ dan } \rho(ad) \geq \rho(a) \wedge \rho(d).$$

Dengan kata lain, ρ^{ω} adalah subsemiring *fuzzy* dari semiring $\mathbb{N}$.

Berdasarkan contoh di atas, berikut disajikan Teorema yang menjamin eksistensi ρ^{ω} selalu berupa subsemiring *fuzzy* dari semiring S, meskipun ρ hanya subset *fuzzy* dari S.

Lemma 3.2. Misalkan ρ adalah subset *fuzzy* dari semiring S dan $\omega \in [0,1]$. Jika

$$s \geq \omega \text{ dan } s = \wedge \{\rho(a) | a \in S\},$$

maka ρ^{ω} adalah subsemiring *fuzzy* dari S.

Bukti:
Misalkan $s \geq \omega$ dan $s = \bigwedge_{a \in S} \rho(a)$, maka untuk setiap $a \in S$, dipenuhi kondisi $\rho(a) \geq \omega$, sehingga

$$\omega = \rho(a) \wedge \omega = \rho^{\omega}(a).$$

Selanjutnya, diambil sembarang $a, d \in S$, maka

$$\rho(a+d) \geq \omega \text{ dan } \rho(ad) \geq \omega.$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} \rho^{\omega}(a+d) &= \rho(a+d) \wedge \omega \\ &= \omega \\ &= \omega \wedge \omega \\ &= (\rho(a) \wedge \omega) \wedge (\rho(d) \wedge \omega) \\ &= \rho^{\omega}(a) \wedge \rho^{\omega}(d) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \rho^{\omega}(ad) &= \rho(ad) \wedge \omega \\ &= \omega \\ &= \omega \wedge \omega \\ &= (\rho(a) \wedge \omega) \wedge (\rho(d) \wedge \omega) \\ &= \rho^{\omega}(a) \wedge \rho^{\omega}(d). \end{aligned}$$

Jadi, ρ^{ω} adalah subsemiring *fuzzy* dari$S$. ■

Setelah mengkaji Teorema yang menjamin eksistensi ρ^{ω} selalu berupa subsemiring *fuzzy* dari semiring S, meskipun ρ hanya subset *fuzzy* dari S. Berikut disajikan Teorema yang analog, yang menjamin eksistensi ρ^{ω} sebagai subsemiring *fuzzy dari S* selalu terjadi, yang dikaitkan dengan subsemiring dan nilai keanggotaan.

Teorema 3.3. Misalkan ρ subset *fuzzy* dari semiring S. *Jika H* adalah subsemiring dari S, maka untuk setiap $s \in (0,1]$ terdapat subsemiring *fuzzy* ρ^{ω} dari S sedemikian sehingga $\rho_s^{\omega} = H$.

Bukti:
Misalkan H adalah subsemiring dari S dan $\rho : S \longrightarrow [0,1]$ dengan:

$$\rho(a) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} s, & a \in H \\ 0, & a \notin H \end{cases}$$

untuk setiap $a \in S$ dan $s \in (0,1]$.

Untuk sembarang $a, d \in S$, ditinjau 3(tiga) kasus berikut ini.

Kasus 1
Kondisi $a, d \in$H, maka $a + d \in H$ dan $ad \in H$, sehingga menurut nilai keanggotaan ρ, dipenuhi:

$$\rho(a) = s, \rho(d) = s, \rho(a+d) = s, \text{dan } \rho(ad) = s.$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}\rho^{\omega}(a+d) &= \rho(a+d) \wedge \omega \\ &= s \wedge \omega \\ &= (s \wedge \omega) \wedge (s \wedge \omega) \\ &= (\rho(a) \wedge \omega) \wedge (\rho(d) \wedge \omega) \\ &= \rho^{\omega}(a) \wedge \rho^{\omega}(d),\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\rho^{\omega}(ad) &= \rho(ad) \wedge \omega \\ &= s \wedge \omega \\ &= (s \wedge \omega) \wedge (s \wedge \omega) \\ &= (\rho(a) \wedge \omega) \wedge (\rho(d) \wedge \omega) \\ &= \rho^{\omega}(a) \wedge \rho^{\omega}(d).\end{aligned}$$

Kasus 2

Kondisi $a \in H$ dan $d \notin H$, maka berdasarkan nilai keanggotaan ρ, diperoleh kondisi:

$$\rho(a) = s, \rho(d) = 0, \rho(a+d) \geq 0, \text{ dan } \rho(ad) \geq 0.$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned}\rho^{\omega}(a+d) &= \rho(a+d) \wedge \omega \\ &\geq 0 \wedge \omega \\ &= (s \wedge \omega) \wedge (0 \wedge \omega) \\ &= (\rho(a) \wedge \omega) \wedge (\rho(d) \wedge \omega) \\ &= \rho^{\omega}(a) \wedge \rho^{\omega}(d),\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\rho^{\omega}(ad) &= \rho(ad) \wedge \omega \\ &\geq 0 \wedge \omega \\ &= (s \wedge \omega) \wedge (0 \wedge \omega) \\ &= (\rho(a) \wedge \omega) \wedge (\rho(d) \wedge \omega) \\ &= \rho^{\omega}(a) \wedge \rho^{\omega}(d).\end{aligned}$$

Kasus 3

Kondisi $a, d \notin H$, maka berdasarkan nilai keanggotaa dari ρ, dipenuhi kondisi berikut ini.

$$\rho(a) = 0, \rho(d) = 0, \rho(a+d) \geq 0 \text{ dan } \rho(ad) \geq 0.$$

Oleh sebab itu,

$$\begin{aligned}\rho^{\omega}(a+d) &= \rho(a+d) \wedge \omega \\ &\geq 0 \wedge \omega \\ &= (0 \wedge \omega) \wedge (0 \wedge \omega) \\ &= (\rho(a) \wedge \omega) \wedge (\rho(d) \wedge \omega) \\ &= \rho^{\omega}(a) \wedge \rho^{\omega}(d),\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\rho^{\omega}(ad) &= \rho(ad) \wedge \omega \\ &\geq 0 \wedge \omega \\ &= (0 \wedge \omega) \wedge (0 \wedge \omega) \\ &= (\rho(a) \wedge \omega) \wedge (\rho(d) \wedge \omega) \\ &= \rho^{\omega}(a) \wedge \rho^{\omega}(d)\end{aligned}$$

Berdasarkan hasil analisa pada Kasus 1, Kasus 2, dan Kasus 3 di atas, untuk setiap $a, d \in S$ berlaku:

$$\rho^{\omega}(a+d) \geq \rho^{\omega}(a) \wedge \rho^{\omega}(d) \text{ dan } \rho^{\omega}(ad) \geq \rho^{\omega}(a) \wedge \rho^{\omega}(d).$$

Dengan kata lain, ρ^{ω} adalah subsemiring *fuzzy* dari S. Selanjutnya, menurut karakteristik keanggotaan level subsetρ_s^{ω} dan nilai keanggotaan dari ρ, maka

$$\begin{aligned}
\rho_s^{\omega} &= \{c \in S \mid \rho^{\omega}(c) \geq s\} \\
&= \{c \in S \mid \rho(c) \wedge \omega \geq s\} \\
&= \{c \in S \mid \rho(c) \geq s\} \\
&= \{c \in S \mid c \in H\} \\
&= H. \blacksquare
\end{aligned}$$

Kondisi subsemiring dari semiring S menetukan ekisistensi ρ^{ω} sebagai subsemiring *fuzzy* dari S dan level subsetnya sama dengan subsemiring di S. Berikut ini, disajikan Teorema yang menjamin level subset ρ_s^{ω} untuk setiap $s \in [0,1]$ adalah subsemiring dari S, jika ρ^{ω} dari S adalah subsemiring *fuzzy* dari S, dan juga berlaku sebaliknya.

Lemma 3.4. Misalkan ρ subset *fuzzy* dari semiring S. Subset *fuzzy* ρ^{ω} dari S adalah subsemiring *fuzzy* dari S jika dan hanya jika setiap level subset ρ_s^{ω} $(\neq \emptyset)$ dari ρ^{ω} adalah subsemiring dari S, untuk se*tiap* $s \in [0,1]$.

Bukti:

($\Rightarrow$) Misalkan ρ^{ω} subsemiring *fuzzy* dari S dan ρ_s^{ω} $(\neq \emptyset) \subseteq S$, untuk setiap $s \in [0,1]$. Akan dibuktikan ρ_s^{ω} subsemiring dari S. Diambil sembarang $a, d \in \rho_s^{\omega}$, maka

$$\rho^{\omega}(a) \geq s \text{ dan } \rho^{\omega}(d) \geq s.$$

Karena ρ^{ω} subsemiring *fuzzy* dari S, maka

$$\rho^{\omega}(a+d) \geq \rho^{\omega}(a) \wedge \rho^{\omega}(d) \geq s \text{ dan } \rho^{\omega}(ad) \geq \rho^{\omega}(a) \wedge \rho^{\omega}(d) \geq s.$$

Oleh karena itu,

$$a+d \in \rho_s^{\omega} \text{ dan } ad \in \rho_s^{\omega}.$$

Dengan kata lain, ρ_s^{ω} adalah subsemiring dari S, untuk setiap $s \in [0,1]$.

($\Leftarrow$) Misalkan setiap ρ_s^{ω} $(\neq \emptyset)$ adalah subsemiring dari S, untuk setiap $s \in [0,1]$. Akan dibuktikan subset *fuzzy* ρ^{ω} dari S adalah subsemiring *fuzzy* dari S. Andaikan terdapat $a_0, d_0 \in S$ sedemikian sehingga

$$\rho^{\omega}(a_0+d_0) < \rho^{\omega}(a_0) \wedge \rho^{\omega}(d_0) \text{ dan } \rho^{\omega}(a_0 d_0) < \rho^{\omega}(a_0) \wedge \rho^{\omega}(d_0).$$

Dipilih $r \in [0,1]$ sedemikian sehingga

$$\rho^{\omega}(a_0+d_0) < r \leq \rho^{\omega}(a_0) \wedge \rho^{\omega}(d_0) \text{ dan } \rho^{\omega}(a_0 d_0) < r \leq \rho^{\omega}(a_0) \wedge \rho^{\omega}(d_0).$$

Oleh karena itu,

$$a_0, d_0 \in \rho_r^{\omega}.$$

Tetapi,

$$a_0+d_0 \notin \rho_r^{\omega} \text{ dan } a_0 d_0 \notin \rho_r^{\omega}.$$

Kondisi ini, kontradiksi dengan ρ_s^ω adalah subsemiring dari S, untuk setiap $s \in \rho(S)$, sehingga pengandaian salah, seharusnya untuk setiap $a, d \in S$ berlaku:

$$\rho(a+d) \geq \rho(a) \wedge \rho(d) \text{ dan } \rho(ad) \geq \rho(a) \wedge \rho(d)$$

Jadi, ρ^ω adalah subsemiring *fuzzy* dari S. ■

Teorema 3.4, mempunyai peranan penting dalam struktur semiring *fuzzy.* Dikarenakan, Teorema ini mendeskripsikan hubungan antara semiring dan semiring *fuzzy*, melalui level subset. Kondisi ini, memunculkan ide untuk mengkontruksi sifat-sifat pada semiring *fuzzy*, dengan menginduksi dari sifat-sifat pada semiring. Diantaranya, teorema irisan dua subsemiring di S adalah subsemiring di S, sehingga pada semiring *fuzzy* dapat dikontruksi Teorema yang analog, seperti yang disajikan pada Teorema 3.5 berikut ini.

Teorema 3.5. Misalkan ρ dan δ adalah subsemiring *fuzzy* dari semiring S, maka $\rho \cap \delta$ adalah subsemiring *fuzzy* dari S.

Bukti:
Misalkan ρ dan δ adalah subsemiring *fuzzy* dari S, maka untuk setiap $a, d \in S$ berlaku:

$$\begin{aligned}(\rho\cap\delta)(a+d) &= \rho(a+d) \wedge \delta(a+d)\\ &\geq [\rho(a) \wedge \rho(d)] \wedge [\delta(a) \wedge \delta(d)]\\ &= [\rho(a) \wedge \delta(a)] \wedge [\rho(d) \wedge \delta(d)]\\ &= (\rho\cap\delta)(a) \wedge (\rho\cap\delta)(d),\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}(\rho\cap\delta)(ad) &= \rho(ad) \wedge \delta(ad)\\ &\geq [\rho(a) \wedge \rho(d)] \wedge [\delta(a) \wedge \delta(d)]\\ &= [\rho(a) \wedge \delta(a)] \wedge [\rho(d) \wedge \delta(d)]\\ &= (\rho\cap\delta)(a) \wedge (\rho\cap\delta)(d).\end{aligned}$$

Oleh karena itu, $\rho \cap \delta$ adalah subsemiring *fuzzy* dari S.■

Irisan dua subsemiring *fuzzy* dari semiring S adalah subsemiring *fuzzy* dari semiring S, dipenuhi seperti sifat irisan dua subsemiring di semiring S. Hasil yang diperoleh dari Teorema 3.5, dapat dijadikan dasar untuk membentuk irisan sebanyak hingga dari subsemiring *fuzzy* dari semiring S, seperti yang disajikan pada Teorema berikut ini.

Akibat 3.6. Misalkan ρ_1, ρ_2, ..., dan ρ_n adalah subsemiring *fuzzy* dari semiring S, maka

$$\rho_1 \cap \rho_2 \cap \cdots \cap \rho_n$$

adalah subsemiring *fuzzy* dari S.

Analog dengan Teorema 3.5, dikontruksi irisan dari dua ω – subsemiring fuzzy dari semiring S dengan memperhatikan kondisi pada Teorema 3.1 dan Teorema 3.2.

Teorema 3.7. Misalkan ρ dan δ adalah subsemiring *fuzzy* dari semiring S, maka $(\rho\cap\delta)^\omega$ dan $\rho^\omega \cap \delta^\omega$ adalah subsemiring *fuzzy* dari S.

Bukti:
Misalkan ρ dan δ adalah subsemiring *fuzzy* dari S, maka berdasarkan Teorema 3.5, $\rho \cap \delta$ adalah subsemiring *fuzzy* dari S. Akibatnya, untuk setiap $a, d \in S$ berlaku:

$$\begin{aligned}(\rho \cap \delta)^{\omega}(a+d) &= [(\rho \cap \delta)(a+d)] \wedge \omega \\ &\geq [(\rho \cap \delta)(a) \wedge (\rho \cap \delta)(d)] \wedge \omega \\ &= [(\rho \cap \delta)(a) \wedge \omega] \wedge [(\rho \cap \delta)(d) \wedge \omega] \\ &= (\rho \cap \delta)^{\omega}(a) \wedge (\rho \cap \delta)^{\omega}(d),\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}(\rho \cap \delta)^{\omega}(ad) &= [(\rho \cap \delta)(ad)] \wedge \omega \\ &\geq [(\rho \cap \delta)(a) \wedge (\rho \cap \delta)(d)] \wedge \omega \\ &= [(\rho \cap \delta)(a) \wedge \omega] \wedge [(\rho \cap \delta)(d) \wedge \omega] \\ &= (\rho \cap \delta)^{\omega}(a) \wedge (\rho \cap \delta)^{\omega}(d).\end{aligned}$$

Oleh karena itu, $(\rho \cap \delta)^{\omega}$ adalah subsemiring *fuzzy* dari S. Selanjutnya, untuk membuktikan $\rho^{\omega} \cap \delta^{\omega}$ adalah subsemiring *fuzzy* dari S, cukup dibuktikan $(\rho \cap \delta)^{\omega} = \rho^{\omega} \cap \delta^{\omega}$. Diambil sembarang $d \in S$, maka

$$\begin{aligned}(\rho \cap \delta)^{\omega}(d) &= [(\rho \cap \delta)(d)] \wedge \omega = [\rho(d) \wedge \delta(d)] \wedge \omega = [\rho(d) \wedge \omega] \wedge [\delta(d) \wedge \omega] \\ &= \rho^{\omega}(d) \wedge \delta^{\omega}(d) = (\rho^{\omega} \cap \delta^{\omega})(d).\end{aligned}$$

Akibatnya, $(\rho \cap \delta)^{\omega} = \rho^{\omega} \cap \delta^{\omega}$.■

Berdasarkan hasil analisa pada langkah pembuktian pada Teorema 3.7, maka dapat dibentuk sifat yang analog dengan hukum De Morgan pada teori himpunan.

Akibat 3.8. Misalkan ρ dan δ adalah subsemiring *fuzzy* dari semiring S, maka $(\rho \cap \delta)^{\omega} = \rho^{\omega} \cap \delta^{\omega}$.

Selanjutnya, disajikan sifat yang merupakan perumuman dari Teorema 3.7.

Akibat 3.9. Misalkan $\rho_1, \rho_2, \ldots$, dan ρ_n adalah subsemiring *fuzzy* dari semiring S, maka

$$(\rho_1 \cap \rho_2 \cap \cdots \cap \rho_n)^{\omega} \text{ dan } \rho_1^{\omega} \cap \rho_2^{\omega} \cap \cdots \cap \rho_n^{\omega}$$

adalah subsemiring *fuzzy* dari S.

Sifat terakhir yang yang disajikan pada tulisan ini adalah sifat yang diperoleh pada analisa pembuktian pada Teorema 3.7 dan diperumum untuk sebanyak n subsemiring *fuzzy* dari semiring S.

Akibat 3.10. Misalkan $\rho_1, \rho_2, \ldots$, *dan* ρ_n adalah subsemiring *fuzzy* dari semiring S, maka

$$(\rho_1 \cap \rho_2 \cap \cdots \cap \rho_n)^{\omega} = \rho_1^{\omega} \cap \rho_2^{\omega} \cap \cdots \cap \rho_n^{\omega}.$$

SIMPULAN

Sifat penting yang dapat dijadikan sebagai simpulan dari tulisan ini adalah eksistensi dari ω – subsemiring *fuzzy* ρ^{ω} dari semiring S dapat terjadi, jika diberikan subsemiring *fuzzy* ρ dari S, bahkan dapat diperlemah untuk ρ subset *fuzzy* dari S, serta irisan dua atau lebih ω – subsemiring *fuzzy* dari semiring S selalu merupakan ω – subsemiring *fuzzy* dari S.

REFERENSI

Abdurrahman, S. (2018). Interior Subgrup Fuzzy. *Jurnal Fourier*, *7*(1), 13–21.

Ahsan, J., Mordeson, J. N., & Shabir, M. (2012). *Fuzzy Semirings with Applications to Automata Theory*. Springer Berlin Heidelberg New York Dordrecht London.

Jagatap, R. D. (2014). Right k -Weakly Regular Γ -Semirings. *Hindawi Publishing Corporation Algebra*, *2014*, 1–5.

Mordeson, J., & Bhutani, K. R. (2005). Fuzzy Subsets and Fuzzy Subgroups. In *Group* (Vol. 39, pp. 1–39).

Rosenfeld, A. (1971). Fuzzy groups. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *35*(3), 512–517.

Sharma, P. K. (2013a). Alpha - Fuzzy Subgroups. *International Journal of Fuzzy Mathematics and Systems*, *3*(1), 47–59.

Sharma, P. K. (2013b). T- fuzzy Subring and Ideal. *Indian Journal of Computational and Applied Mathematics*, *1*(1), 93–104.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, *8*(3), 338–353.