

SPAN MINIMAL DARI PELABELAN $L(3,1)$ PADA BEBERAPA KELAS GRAF

Hafif Komarullah*

Program Studi Doktor Matematika, Universitas Brawijaya, Malang, Indonesia

*Penulis korespondensi: hafififa4@gmail.com

ABSTRAK

Pelabelan graf adalah kajian primer dalam teori graf yang berkaitan dengan optimasi penggunaan sumber daya seperti alokasi frekuensi pada jaringan komunikasi. Penelitian ini bertujuan menentukan span minimal dari pelabelan $L(3,1)$ pada graf *jellyfish*, graf *cricket*, dan graf *dagger*. Pelabelan $L(3,1)$ memberikan label bilangan bulat pada simpul graf dengan syarat dua simpul bertetangga memiliki selisih label sekurang-kurangnya tiga, dan dua simpul berjarak dua memiliki selisih sekurang-kurangnya satu. Penelitian menggunakan metode analisis teoretis dengan pendekatan konstruktif berdasarkan jarak dan struktur simpul pada tiap graf. Hasil menunjukkan bahwa graf *jellyfish* dengan $m = n - 1$, $m \geq 4$, dan $n \geq 3$ memiliki span minimal $m + 4$, sedangkan graf *cricket* dan graf *dagger* masing-masing memiliki span minimal 6. Temuan ini memberikan kontribusi teoretis dalam pengembangan studi pelabelan $L(3,1)$, serta dapat diaplikasikan pada optimasi alokasi frekuensi dalam jaringan komunikasi nirkabel untuk meminimalkan interferensi antar saluran.

Kata kunci: graf *cricket*, graf *dagger*, graf *jellyfish*, pelabelan $L(3,1)$, span minimal

1 PENDAHULUAN

Teori graf adalah bagian penting dalam matematika diskrit yang banyak digunakan untuk memodelkan berbagai persoalan nyata yang melibatkan hubungan antar objek (Komarullah, 2025b). Dalam bidang ilmu komputer (Majeed & Rauf, 2020), jaringan komunikasi (Shen *et al.*, 2023), biologi (Gao *et al.*, 2018), hingga sistem transportasi (Guze, 2019), graf berperan sebagai alat representasi yang efisien dalam menggambarkan keterkaitan antar elemen. Salah satu topik yang berkembang pesat dalam teori graf adalah pelabelan graf, yaitu proses pemberian label bilangan pada sisi, simpul, atau keduanya dengan memenuhi aturan tertentu (Gallian, 2022). Kajian pelabelan graf tidak hanya bersifat teoretis, tetapi juga memiliki implikasi praktis dalam optimasi penggunaan sumber daya (Prasanna *et al.*, 2014), pengkodean data (Prihandoko *et al.*, 2019), dan pengalokasian frekuensi dalam sistem komunikasi (Griggs & Yeh, 1992).

Salah satu jenis pelabelan yang menarik untuk diteliti adalah pelabelan $L(h, k)$, yang diperkenalkan oleh Griggs & Yeh (1992). Pelabelan $L(h, k)$ adalah pelabelan pada himpunan simpul graf G dengan bilangan bulat tak negatif sedemikian sehingga dua simpul yang berjarak satu mempunyai perbedaan label sekurang-kurangnya h , dan dua simpul yang berjarak dua mempunyai perbedaan label sekurang-kurangnya k . Nilai span atau rentang pelabelan, yaitu label terbesar dari pelabelan $L(h, k)$ menjadi fokus utama dalam kajian ini. Nilai span terkecil yang mungkin diperoleh untuk suatu graf G dilambangkan dengan $\lambda_{h,k}(G)$ dan disebut nilai minimum span pelabelan $L(h, k)$.

Dalam beberapa tahun terakhir, berbagai studi mengenai pelabelan $L(2,1)$ telah dilakukan pada beragam kelas graf, seperti graf lintasan, graf siklus, graf bintang, dan graf roda (Griggs & Yeh, 1992). Penelitian-penelitian berikutnya memperluas penerapan konsep pelabelan tersebut pada jenis graf lain, antara lain graf kipas (Fatimah *et al.*, 2016), graf Sierpinski (Sagala & Susiana, 2017), graf lolipop serta graf pendulum (Kusbudiono *et al.*,

2022), graf kerucut dan graf kecebong (Komarullah *et al.*, 2022), graf persahabatan (Halikin & Komarullah, 2022), graf gurita dan graf ubur-ubur (Komarullah, 2023), serta graf *dumbbell* (Komarullah *et al.*, 2025). Namun, kajian terhadap pelabelan $L(3,1)$ masih relatif terbatas. Misalkan G merupakan graf terhubung sederhana dengan himpunan berhingga simpul $V(G)$, pelabelan $L(3,1)$ pada graf G didefinisikan oleh fungsi $\omega: V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$ untuk setiap $a, b \in V(G)$ berlaku $|\omega(a) - \omega(b)| \geq 3$ jika $d(u, v) = 1$ dan $|\omega(a) - \omega(b)| \geq 1$ jika $d(u, v) = 2$. Nilai minimum k pada fungsi ω dinotasikan dengan $\lambda_{3,1}(G)$ (Ghosh & Pal, 2016). Beberapa graf yang sudah diteliti dalam topik pelabelan $L(3,1)$ diantaranya adalah graf siklus, graf lintasan, graf lengkap, graf bintang, graf bipartit, graf bistar (Ghosh & Pal, 2016), graf *supercycle* (Febryani *et al.*, 2023), graf hasil operasi comb antara graf siklus dan graf bintang (Aini *et al.*, 2025), graf kecebong, graf lolipop (Komarullah, 2025a), graf pendulum, dan graf ilalang (Komarullah, 2025c).

Penelitian ini berfokus pada penentuan span minimal dari pelabelan $L(3,1)$ pada tiga kelas graf, yaitu graf *jellyfish*, graf *cricket*, dan graf *dagger*. Ketiga kelas graf tersebut dipilih karena memiliki pola keterhubungan berbeda namun masih memungkinkan analisis eksak terhadap pelabelan $L(3,1)$. Hasil yang diperoleh diharapkan dapat memperluas teori pelabelan $L(h,k)$ serta memberikan kontribusi dalam aspek praktis, khususnya dalam optimasi alokasi sumber daya frekuensi pada jaringan komunikasi yang direpresentasikan melalui struktur graf.

2 METODE

Penelitian ini merupakan penelitian teoretis yang bersifat analitik dan konstruktif dalam bidang matematika diskrit, khususnya teori graf. Fokus utama penelitian ini yaitu menentukan span minimal dari pelabelan $L(3,1)$ pada beberapa kelas graf, yaitu graf *jellyfish*, graf *cricket*, dan graf *dagger*. Langkah-langkah penelitian dilakukan secara sistematis sebagai berikut:

2.1 Kajian Teoretis dan Definisi Awal

Tahap pertama dilakukan dengan mengkaji konsep dasar teori graf dan definisi pelabelan $L(h,k)$, khususnya untuk kasus $h = 3$ dan $k = 1$. Pada tahap ini dilakukan penelaahan terhadap struktur dasar dari ketiga graf yang menjadi objek penelitian, yaitu graf *jellyfish*, graf *cricket*, dan graf *dagger*. Setiap graf didefinisikan secara matematis dalam bentuk himpunan simpul dan himpunan sisinya.

2.2 Konstruksi Pola Pelabelan

Setelah struktur graf ditentukan, tahap berikutnya adalah melakukan konstruksi pola pelabelan pada masing-masing graf. Pelabelan dilakukan dengan menentukan urutan pemberian label pada simpul-simpul sedemikian sehingga kondisi pelabelan $L(3,1)$ terpenuhi. Proses ini dilakukan secara induktif dengan mempertimbangkan jarak antar simpul.

2.3 Analisis Span Minimal

Dari hasil konstruksi pelabelan yang memenuhi syarat, dilakukan pengamatan pada span, yaitu label terbesar pada pelabelan, kemudian dianalisis apakah span tersebut merupakan nilai minimal yang dapat dicapai. Pembuktian dilakukan melalui pendekatan deduktif dengan menunjukkan bahwa tidak terdapat pelabelan lain yang menghasilkan span lebih kecil tanpa melanggar aturan pelabelan $L(3,1)$.

2.4 Formulasi dan Pembuktian Teorema

Berdasarkan hasil analisis, diperoleh formulasi umum untuk nilai $\lambda_{3,1}(G)$ pada masing-masing kelas graf yang disajikan dalam bentuk teorema dan dibuktikan. Untuk membuktikan teorema yang dihasilkan dalam penelitian ini, peneliti memanfaatkan beberapa lemma berikut.

Lemma 1. Jika H adalah subgraf dari graf G maka $\lambda_{3,1}(H) \leq \lambda_{3,1}(G)$ (Ghosh & Pal, 2016).

Lemma 2. Untuk setiap $n \geq 2$, $\lambda_{3,1}(S_n) = n + 2$ (Ghosh & Pal, 2016).

Lemma 3. Untuk setiap $n \geq 3$, $\lambda_{3,1}(C_n) = 6$ (Ghosh & Pal, 2016).

3 HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelitian ini menghasilkan tiga teorema utama yang menunjukkan hubungan antara struktur graf dengan nilai span minimal pelabelan $L(3,1)$. Setiap teorema dibuktikan secara analitik berdasarkan konstruksi pelabelan yang memenuhi syarat, kemudian dibandingkan dengan kemungkinan konfigurasi lain untuk memastikan bahwa nilai yang diperoleh merupakan span minimal.

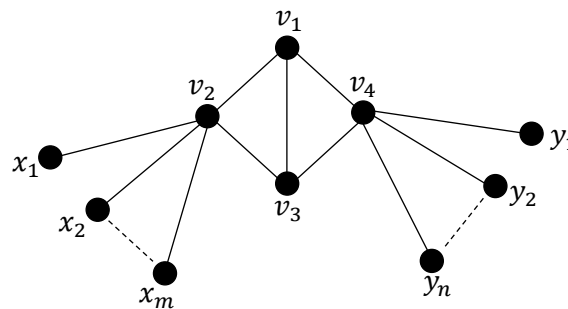
3.1 Graf Jellyfish

Graf *jellyfish* dengan order $m + n + 4$ dan ukuran $m + n + 5$ dinotasikan dengan $J_{m,n}$ adalah graf yang dibangun dari graf siklus C_4 yang salah satu simpul berhadapan dihubungkan oleh sebuah sisi, sedangkan dua simpul berhadapan lainnya masing-masing ditempelkan dengan simpul pusat graf bintang S_n dan graf bintang S_m (Abdurahman *et al.*, 2024). Himpunan simpul dan sisi graf *jellyfish* yaitu:

$$V(J_{m,n}) = \{v_\wp \mid \wp = 1, 2, 3, 4\} \cup \{x_{\mathfrak{R}} \mid \mathfrak{R} = 1, 2, \dots, m\} \cup \{y_{\mathfrak{S}} \mid \mathfrak{S} = 1, 2, \dots, n\}$$

$$E(J_{m,n}) = \{v_1 v_4, v_1 v_3, v_\wp v_{\wp+1} \mid \wp = 1, 2, 3\} \cup \{v_2 x_{\mathfrak{R}} \mid \mathfrak{R} = 1, 2, \dots, m\} \cup \{v_4 y_{\mathfrak{S}} \mid \mathfrak{S} = 1, 2, \dots, n\}$$

Gambar 1 adalah graf *jellyfish* $J_{m,n}$.



Gambar 1. Graf *jellyfish*

Teorema 1. Jika $J_{m,n}$ adalah graf *jellyfish* dengan $m = n - 1, m \geq 4$, dan $n \geq 3$, maka $\lambda_{3,1}(J_{m,n}) = m + 4$.

Bukti. Untuk membuktikan bahwa $\lambda_{3,1}(J_{m,n}) = m + 4$, akan ditunjukkan bahwa $\lambda_{3,1}(J_{m,n}) \geq m + 4$. Pandang bahwa graf bintang S_{n+2} merupakan subgraf dari graf *jellyfish* $J_{m,n}$. Berpedoman pada Lemma 1 dan Lemma 2 diperoleh bahwa $\lambda_{3,1}(J_{m,n}) \geq \lambda_{3,1}(S_{m+2}) = m + 4$, sehingga $\lambda_{3,1}(J_{m,n}) \geq m + 4$. Selanjutnya, didefinisikan fungsi $\omega: V(J_{m,n}) \rightarrow \{0, 1, \dots, m + 4\}$ untuk membuktikan $\lambda_{3,1}(J_{m,n}) \leq m + 4$.

$$\omega(v_\wp) = \begin{cases} \frac{-3\wp + 17}{2}, & \text{untuk } \wp \text{ ganjil,} \\ \frac{\wp}{2} - 2, & \text{untuk } \wp \text{ genap.} \end{cases}$$

$$\omega(x_{\mathcal{H}}) = \begin{cases} 3 & , \text{ untuk } \mathcal{H} = 1, \\ 5 & , \text{ untuk } \mathcal{H} = 2, \\ 6 & , \text{ untuk } \mathcal{H} = 3, \\ \mathcal{H} + 4, & \text{ untuk } \mathcal{H} = 4, 5, \dots, m. \end{cases}$$

$$\omega(y_k) = \begin{cases} 5 & , \text{ untuk } \mathcal{T} = 1, \\ 6 & , \text{ untuk } \mathcal{T} = 2, \\ \mathcal{T} + 5, & \text{ untuk } \mathcal{T} = 3, 4, \dots, n. \end{cases}$$

Fungsi ω terbukti memenuhi ketentuan pelabelan $L(3,1)$, yaitu selisih label sekurang-kurangnya 3 untuk simpul yang berjarak satu dan sekurang-kurangnya 1 untuk simpul yang berjarak dua. Dengan demikian, diperoleh $\lambda_{3,1}(J_{m,n}) \leq m + 4$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa $\lambda_{3,1}(J_{m,n}) = m + 4$. ■

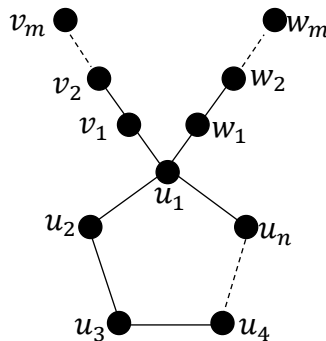
3.2 Graf Cricket

Graf *cricket* $Cr_{n,m}$ memiliki order $2m + n$ dan ukuran $2m + n$ merupakan graf yang dibangun dari hasil identifikasi simpul graf siklus C_n ($n \geq 4$) dan graf lintasan P_{2m+1} ($m \geq 2$) dengan menempelkan simpul tengah graf lintasan dengan salah satu simpul pada graf siklus (Kusumawati *et al.*, 2024). Himpunan simpul dan sisi pada graf *cricket* dinotasikan sebagai berikut.

$$V(Cr_{n,m}) = \{u_{\wp} \mid \wp = 1, 2, \dots, n\} \cup \{v_{\mathfrak{R}} \mid \mathfrak{R} = 1, 2, \dots, m\} \cup \{w_{\mathfrak{R}} \mid \mathfrak{R} = 1, 2, \dots, m\}$$

$$E(Cr_{n,m}) = \{u_1 u_n, u_{\wp} u_{\wp+1} \mid \wp = 1, 2, \dots, n-1\} \cup \{u_1 v_1, u_1 w_1\} \cup \{v_{\mathfrak{R}} v_{\mathfrak{R}+1}, w_{\mathfrak{R}} w_{\mathfrak{R}+1} \mid \mathfrak{R} = 1, 2, \dots, m-1\}$$

Gambar 2 menyajikan contoh penamaan simpul dan sisi pada graf *cricket* ($Cr_{n,m}$).



Gambar 2. Graf *cricket*

Teorema 2. Jika $Cr_{n,m}$ adalah graf cricket dengan $n \geq 4$ dan $m \geq 2$, maka $\lambda_{3,1}(Cr_{n,m}) = 6$.

Bukti. Untuk membuktikan $\lambda_{3,1}(Cr_{n,m}) = 6$, maka harus ditunjukkan $\lambda_{3,1}(Cr_{n,m}) \geq 6$ dan $\lambda_{3,1}(Cr_{n,m}) \leq 6$. Akan ditunjukkan bahwa $\lambda_{3,1}(Cr_{n,m}) \geq 6$. Perhatikan bahwa graf siklus C_n adalah subgraf dari graf cricket $Cr_{n,m}$. Berdasarkan Lemma 1 dan Lemma 3 diperoleh bahwa $\lambda_{3,1}(Cr_{n,m}) \geq \lambda_{3,1}(C_n) = 6$ sehingga terbukti bahwa $\lambda_{3,1}(Cr_{n,m}) \geq 6$. Selanjutnya dibangun sebuah fungsi yang didefinisikan oleh $\omega: V(C_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, 6\}$ yang terbagi menjadi 4 kasus sebagai berikut.

1. Kasus $n = 4$

$$\begin{aligned}\omega(u_{\wp}) &= \begin{cases} \frac{\wp - 1}{2}, & \text{untuk } \wp \text{ ganjil,} \\ \frac{\wp}{2} + 3, & \text{untuk } \wp \text{ genap.} \end{cases} \\ \omega(v_{\mathcal{H}}) &= \begin{cases} 3, & \text{untuk } \mathcal{H} \equiv 1 \pmod{3}, \\ 6, & \text{untuk } \mathcal{H} \equiv 2 \pmod{3}, \\ 0, & \text{untuk } \mathcal{H} \equiv 0 \pmod{3}. \end{cases} \\ \omega(w_{\mathcal{H}}) &= \begin{cases} 6, & \text{untuk } \mathcal{H} \equiv 1 \pmod{3}, \\ 3, & \text{untuk } \mathcal{H} \equiv 2 \pmod{3}, \\ 0, & \text{untuk } \mathcal{H} \equiv 0 \pmod{3}. \end{cases}\end{aligned}$$

2. Kasus $n \equiv 1 \pmod{3}$ dan $\wp \neq 4$

$$\begin{aligned}\omega(u_{\wp}) &= \begin{cases} 0, & \text{untuk } \wp \equiv 1 \pmod{3} \text{ dan } \wp \neq n, \\ 3, & \text{untuk } \wp \equiv 2 \pmod{3} \text{ dan } \wp \neq n - 2, \\ 6, & \text{untuk } \wp \equiv 0 \pmod{3} \text{ dan } \wp \neq n - 1, \\ 4, & \text{untuk } \wp = n - 2, \\ 1, & \text{untuk } \wp = n - 1, \\ 5, & \text{untuk } \wp = n, \end{cases} \\ \omega(v_{\mathcal{H}}) &= \begin{cases} 6, & \text{untuk } \mathcal{H} \equiv 1 \pmod{3}, \\ 3, & \text{untuk } \mathcal{H} \equiv 2 \pmod{3}, \\ 0, & \text{untuk } \mathcal{H} \equiv 0 \pmod{3}. \end{cases} \\ \omega(w_{\mathcal{H}}) &= \begin{cases} 4, & \text{untuk } \mathcal{H} \equiv 1 \pmod{4}, \\ 1, & \text{untuk } \mathcal{H} \equiv 2 \pmod{4}, \\ 5, & \text{untuk } \mathcal{H} \equiv 3 \pmod{4}, \\ 0, & \text{untuk } \mathcal{H} \equiv 0 \pmod{4}. \end{cases}\end{aligned}$$

3. Kasus $n \equiv 2 \pmod{3}$

$$\begin{aligned}\omega(u_{\wp}) &= \begin{cases} 0, & \text{untuk } \wp \equiv 1 \pmod{3} \text{ dan } \wp \neq n - 1, \\ 3, & \text{untuk } \wp \equiv 2 \pmod{3} \text{ dan } \wp \neq n, \\ 6, & \text{untuk } \wp \equiv 0 \pmod{3}, \\ 1, & \text{untuk } \wp = n - 1, \\ 4, & \text{untuk } \wp = n, \end{cases} \\ \omega(v_{\mathcal{H}}) &= \begin{cases} 5, & \text{untuk } \mathcal{H} \equiv 1 \pmod{4}, \\ 1, & \text{untuk } \mathcal{H} \equiv 2 \pmod{4}, \\ 4, & \text{untuk } \mathcal{H} \equiv 3 \pmod{4}, \\ 0, & \text{untuk } \mathcal{H} \equiv 0 \pmod{4}. \end{cases} \\ \omega(w_{\mathcal{H}}) &= \begin{cases} 6, & \text{untuk } \mathcal{H} \equiv 1 \pmod{3}, \\ 3, & \text{untuk } \mathcal{H} \equiv 2 \pmod{3}, \\ 0, & \text{untuk } \mathcal{H} \equiv 0 \pmod{3}. \end{cases}\end{aligned}$$

4. Kasus $n \equiv 0 \pmod{3}$

$$\begin{aligned}\omega(u_{\wp}) &= \begin{cases} 0, & \text{untuk } \wp \equiv 1 \pmod{3}, \\ 3, & \text{untuk } \wp \equiv 2 \pmod{3}, \\ 6, & \text{untuk } \wp \equiv 0 \pmod{3}. \end{cases} \\ \omega(v_{\mathcal{H}}) &= \begin{cases} 4, & \text{untuk } \mathcal{H} \equiv 1 \pmod{4}, \\ 1, & \text{untuk } \mathcal{H} \equiv 2 \pmod{4}, \\ 5, & \text{untuk } \mathcal{H} \equiv 3 \pmod{4}, \\ 0, & \text{untuk } \mathcal{H} \equiv 0 \pmod{4}. \end{cases}\end{aligned}$$

$$\omega(w_{\mathcal{H}}) = \begin{cases} 5, & \text{untuk } \mathcal{H} \equiv 1 \pmod{4}, \\ 1, & \text{untuk } \mathcal{H} \equiv 2 \pmod{4}, \\ 4, & \text{untuk } \mathcal{H} \equiv 3 \pmod{4}, \\ 0, & \text{untuk } \mathcal{H} \equiv 0 \pmod{4}. \end{cases}$$

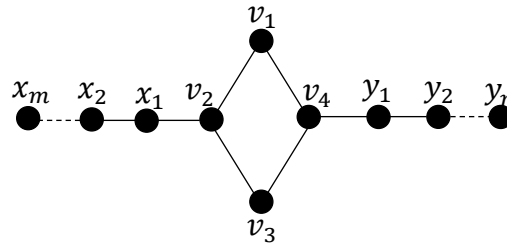
Dapat dengan mudah dibuktikan bahwa fungsi ω memenuhi ketentuan pelabelan $L(3,1)$ dengan label maksimum sebesar 6, sehingga diperoleh $\lambda_{3,1}(Cr_{n,m}) \leq 6$. Dengan demikian, terbukti bahwa $\lambda_{3,1}(Cr_{n,m}) = 6$. ■

3.3 Graf Dagger

Graf *dagger* dengan order dan ukuran $m + n + 4$ dinotasikan dengan $DR_{m,n}$ adalah graf yang dibangun sebuah graf siklus C_4 dengan dua simpul yang berjarak dua masing-masing ditempelkan dengan salah satu ujung graf lintasan P_{m+1} dan P_{n+1} (Rizky, 2023). Himpunan simpul dan sisi graf *dagger* $DR_{m,n}$ yaitu :

$$\begin{aligned} V(DR_{m,n}) &= \{v_{\wp} \mid \wp = 1, 2, 3, 4\} \cup \{x_{\mathcal{R}} \mid \mathcal{R} = 1, 2, \dots, m\} \cup \{y_{\mathfrak{T}} \mid \mathfrak{T} = 1, 2, \dots, n\} \\ E(DR_{m,n}) &= \{v_1 v_4, v_{\wp} v_{\wp+1} \mid \wp = 1, 2, 3\} \cup \{v_2 x_1, x_{\mathcal{R}} x_{\mathcal{R}+1} \mid \mathcal{R} = 1, 2, \dots, m-1\} \cup \{v_4 y_1, y_{\mathfrak{T}} y_{\mathfrak{T}+1} \mid \mathfrak{T} = 1, 2, \dots, n-1\} \end{aligned}$$

Contoh penamaan simpul dan sisi pada graf *dagger* ditunjukkan pada Gambar 3.



Gambar 3. Graf *dagger*

Teorema 3. Jika $DR_{m,n}$ adalah graf *dagger* dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 2$, maka $\lambda_{3,1}(DR_{m,n}) = 6$.

Bukti. Dengan cara yang sama, langkah pertama akan ditunjukkan bahwa $\lambda_{3,1}(DR_{m,n}) \geq 6$. Perhatikan bahwa graf siklus C_4 adalah subgraf dari graf *dagger* $DR_{m,n}$. Berdasarkan Lemma 1 dan Lemma 3 diperoleh $\lambda_{3,1}(DR_{m,n}) \geq \lambda_{3,1}(C_4) = 6$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\lambda_{3,1}(DR_{m,n}) \leq 6$ dengan mendefinisikan fungsi $\omega: V(DR_{m,n}) \rightarrow \{0, 1, \dots, 6\}$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \omega(u_{\wp}) &= \begin{cases} \frac{\wp + 7}{2}, & \text{untuk } \wp \text{ ganjil}, \\ \frac{\wp}{2} - 1, & \text{untuk } \wp \text{ genap}. \end{cases} \\ \omega(x_{\mathcal{R}}) &= \begin{cases} 3, & \text{untuk } \mathcal{R} \equiv 1 \pmod{3}, \\ 6, & \text{untuk } \mathcal{R} \equiv 2 \pmod{3}, \\ 0, & \text{untuk } \mathcal{R} \equiv 0 \pmod{3}. \end{cases} \\ \omega(y_{\mathfrak{T}}) &= \begin{cases} 6, & \text{untuk } \mathfrak{T} \equiv 1 \pmod{3}, \\ 3, & \text{untuk } \mathfrak{T} \equiv 2 \pmod{3}, \\ 0, & \text{untuk } \mathfrak{T} \equiv 0 \pmod{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Fungsi ω terbukti memenuhi ketentuan pelabelan $L(3,1)$, sehingga diperoleh $\lambda_{3,1}(Dr_{m,n}) \leq 6$. Karena $\lambda_{3,1}(Dr_{m,n}) \geq 6$ dan $\lambda_{3,1}(Dr_{m,n}) \leq 6$, maka dapat disimpulkan bahwa $\lambda_{3,1}(Dr_{m,n}) = 6$. ■

4 SIMPULAN

Berdasarkan kajian dan pembuktian yang dilakukan, dapat disimpulkan bahwa nilai span minimum pelabelan $L(3,1)$ dipengaruhi secara signifikan oleh struktur graf. Pada graf *jellyfish* $J_{m,n}$ dengan $m = n - 1$, $m \geq 4$, dan $n \geq 3$, span minimal diperoleh sebesar $m + 4$, pada graf *cricket* $Cr_{m,n}$ dengan $n \geq 4$ dan $m \geq 2$, serta graf *dagger* $Dr_{m,n}$ dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 2$, memiliki span minimal yang sama yaitu 6. Hasil ini memberikan kontribusi teoretis terhadap pengembangan studi pelabelan $L(h,k)$ dan implikasi praktis dalam optimasi alokasi frekuensi pada jaringan komunikasi nirkabel.

DAFTAR PUSTAKA

- Aini, S., Yulianti, K., & Kusumah, Y. S. (2025). Nilai minimum SPAN pelabelan $L(3,1)$ pada graf hasil operasi comb antara graf bintang dan graf siklus. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 13(2), 29–36.
- Fatimah, S., Sudarsana, I. W., & Musdalifah, S. (2016). Pelabelan $L(2,1)$ pada operasi beberapa kelas graf. *Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan*, 13(2), 73–84. <https://doi.org/10.22487/2540766X.2016.v13.i2.7207>
- Febryani, F., Yulianti, K., Kusumah, Y. S., & Wijayanti, U. (2023). Nilai minimal span pelabelan $L(3,1)$ pada graf supercycle $Sc(n,r)$. *Jurnal EurekaMatika*, 11(2), 145–154. <https://doi.org/10.17509/jem.v11i2.66736>
- Gallian, J. A. (2022). A dynamic survey of graph labeling. *Electronic Journal of Combinatorics*, 6(25), 4–623.
- Gao, W., Wu, H., Siddiqui, M. K., & Baig, A. Q. (2018). Study of biological networks using graph theory. *Saudi Journal of Biological Sciences*, 25(6), 1212–1219. <https://doi.org/10.1016/j.sjbs.2017.11.022>
- Ghosh, S., & Pal, A. (2016). $L(3, 1)$ -labeling of some simple graphs. *Advanced Modeling and Optimization*, 18(2), 243–248.
- Griggs, J. R., & Yeh, R. K. (1992). Labelling graphs with a condition at distance 2^* . *Siam Journal on Discrete Mathematics*, 5(4), 586–595.
- Guze, S. (2019). Graph theory approach to the vulnerability of transportation networks. *Algorithms*, 12(12), 270. <https://doi.org/10.3390/a12120270>
- Halikin, I., & Komarullah, H. (2022). Labelling of generalized friendship, windmill, and torch graphs with a condition at distance two. *Proceedings of the International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021) Series: Advances in Computer Science Research*, 35–39. <https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.008>
- Komarullah, H. (2023). Nilai minimum span pada graf gurita, graf siput, dan graf ubur-ubur. *Prosiding Galuh Mathematics National Conference*, 3–1.
- Komarullah, H. (2025a). Pelabelan $L(3, 1)$ pada graf kecebong dan graf lolipop. *Jurnal MSA (Matematika Dan Statistika Serta Aplikasinya)*, 13(2), 23–31. <https://doi.org/https://doi.org/10.62097/almantiq.v1i2.2480>
- Komarullah, H. (2025b). Pelabelan rata-rata pada beberapa kelas graf. *Jurnal MSA (Matematika Dan Statistika Serta Aplikasinya)*, 13(2), 23–31. <https://doi.org/10.24252/msa.v13i2.58710>
- Komarullah, H. (2025c). Span terkecil dari pelabelan $L(3,1)$ pada graf pendulum dan graf ilalang. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 13(3), 82–87.

- Komarullah, H., Halikin, I., & Santoso, K. A. (2022). On the minimum span of cone, tadpole, and barbell graphs. *Proceedings of the International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)*, 40–43. <https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.009>
- Komarullah, H., Saputri, M. D., & Nurfadila, R. A. (2025). Span terkecil dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf dumbbell. *Seminar Nasional Sains Dan Teknologi “SainTek” Seri IV*, 956–963.
- Kusbudiono, K., Umam, I. A., Halikin, I., & Fatekurohman, M. (2022). $L(2, 1)$ labeling of lollipop and pendulum graphs. *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)*, 44–47. <https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.010>
- Majeed, A., & Rauf, I. (2020). Graph theory: A comprehensive survey about graph theory applications in computer science and social networks. *Inventions*, 5(1), 10. <https://doi.org/10.3390/inventions5010010>
- Prasanna, N. L., Sravanthi, K., & Sudhakar, N. (2014). Applications of graph labeling in communication networks. *Oriental Journal of Computer Science and Technology*, 7(1), 139–145.
- Prihandoko, A. C., Dafik, D., & Agustin, I. H. (2019). Implementation of super H-antimagic total graph on establishing stream cipher. *Indonesian Journal of Combinatorics*, 3(1), 14–23. <https://doi.org/10.19184/ijc.2019.3.1.2>
- Sagala, Y., & Susiana, S. (2017). Pelabelan $L(2,1)$ pada graf sierpinski $S(n,k)$. *KARISMATIKA: Kumpulan Artikel Ilmiah, Informatika, Statistik, Matematika Dan Aplikasi*, 3(2), 130–139. <https://doi.org/10.24114/jmk.v3i2.8805>
- Shen, Y., Zhang, J., Song, S. H., & Letaief, K. B. (2023). Graph neural networks for wireless communications: From theory to practice. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 22(5), 3554–3569. <https://doi.org/10.1109/TWC.2022.3219840>